COLEGIO DE BACHILLERES

CUARTO
SEMESTRE

[Guía de estudio]

Matemáticas IV

PLAN 2014
ACTUALIZADO

https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx

PLAN 2014

ACTUALIZADO

CRÉDITOS

Autores:

Profesora. Aimé García
Profesora: Selene del Carmen Ávila Anaya

Actualización:
Profesor: Agustín Hernández Pérez
Profesora: Zaira Eréndira Rojas García
Profesor: Martín Diego Gómez

Coordinadores:
Aimé García Vázquez
Coordinadora de Proyectos de Matemáticas
Subdirección de Planeación Curricular

PRESENTACIÓN

Con la finalidad de acompañar el trabajo con el plan y programas de estudio vigentes, además de brindar un recurso didáctico que apoye al cuerpo docente y al estudiantado en el desarrollo de los aprendizajes esperados; el Colegio de Bachilleres desarrolló, a través de la Dirección de Planeación Académica y en colaboración con el personal docente de los veinte planteles, las guías de estudio correspondientes a las tres áreas de formación: básica, específica y laboral.

Las guías pretenden ser un apoyo para que las y los estudiantes trabajen de manera autónoma con los contenidos esenciales de las asignaturas y con las actividades que les ayudarán al logro de los aprendizajes; el rol del cuerpo docente como mediador y agente activo en el aprendizaje del estudiantado no pierde fuerza, por el contrario, se vuelve fundamental para el logro de las intenciones educativas de este material.

Las guías de estudio también son un insumo para que las y los docentes lo aprovechen como material de referencia, de apoyo para el desarrollo de sus sesiones; o bien como un recurso para la evaluación; de manera que, serán ellos, quienes a partir de su experiencia definirán el mejor uso posible y lo adaptarán a las necesidades de sus grupos.

El Colegio de Bachilleres reconoce el trabajo realizado por el personal participante en la elaboración y revisión de la presente guía y agradece su compromiso, entrega y dedicación, los cuales se reflejan en el servicio educativo pertinente y de calidad que se brinda a más de 90,000 estudiantes.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de las Matemáticas te brinda las herramientas para interpretar el entorno a través de la cuantificación, medición y descripción por medio de ecuaciones y funciones. Una vez que se entiende un concepto matemático, el entorno se mirará de manera diferente. Las aplicaciones matemáticas se pueden observar en cada aspecto de la vida diaria, en la cuenta de las compras, en la construcción de edificios, en los registros de las calificaciones de los estudiantes, en la evolución de una enfermedad, en el desarrollo de avances científicos, entre otros.

Particularmente, la asignatura de Matemáticas IV tiene como propósito que apliques la variación lineal y no lineal en la implementación de estrategias de análisis y solución de diferentes problemas, para desarrollar proyectos y ampliar su capacidad de modelar situaciones de cambio tanto en matemáticas como en otras ciencias que aborden procesos predictivos.

Para lo anterior, tendrás que hacer uso de los aprendizajes previos obtenidos en tus cursos de álgebra y geometría, así como los de otras asignaturas que te apoyarán en la mejor comprensión de los contenidos que se te presentarán.

Este material constituye un apoyo para el momento de contingencia que se está viviendo actualmente y tiene la intención de contribuir a que logres la adquisición de los aprendizajes planteados en el propósito de la asignatura de Matemáticas IV.

Es recomendable que al momento de estudiar atiendas los siguientes consejos:

- Reduce o elimina las distracciones
- Dedica un tiempo exclusivo para el estudio
- Designa un espacio particular para tu estudio
- Organiza cuáles serán los temas que vas a estudiar
- Realiza anotaciones y sigue los procedimientos de manera activa, es decir, reprodúcelos y compruébalos por tu cuenta
- Anexa hojas si lo consideras necesario.
- Para la realización de las gráficas, apóyate en hojas cuadriculadas.
- Ten a la mano una calculadora científica y explórala con el fin de conocer su funcionamiento
- Si se te presentan dudas, repasa el contenido o consulta el material recomendado en la sección ¿Quieres conocer más?

ÍNDICE

CORTE 1

Cambio y predicción: introducción a las funciones

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos	Aprendizajes esperados
• Tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos.	• Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.
• Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes.	• Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.

PROPÓSITO

Que el estudiante comprenda la utilidad (las características) predictiva de las funciones en el estudio de los procesos de cambio de diferentes fenómenos naturales, para aplicarlas en el análisis, solución y representación de problemas de su contexto y obtenga elementos que le permitan incrementar su intuición y creatividad.

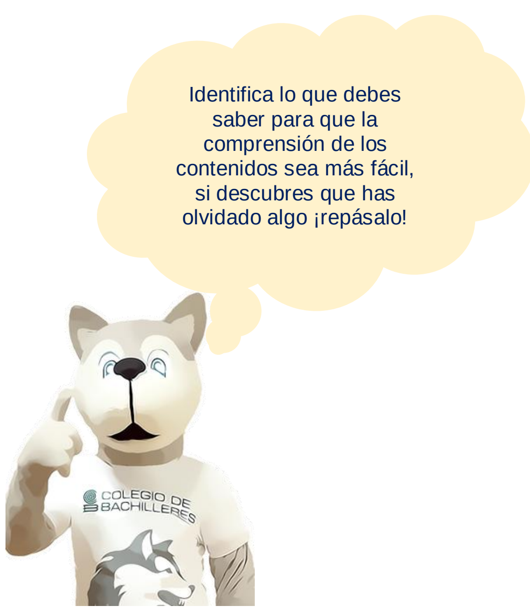
RECOMENDACIÓN

Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

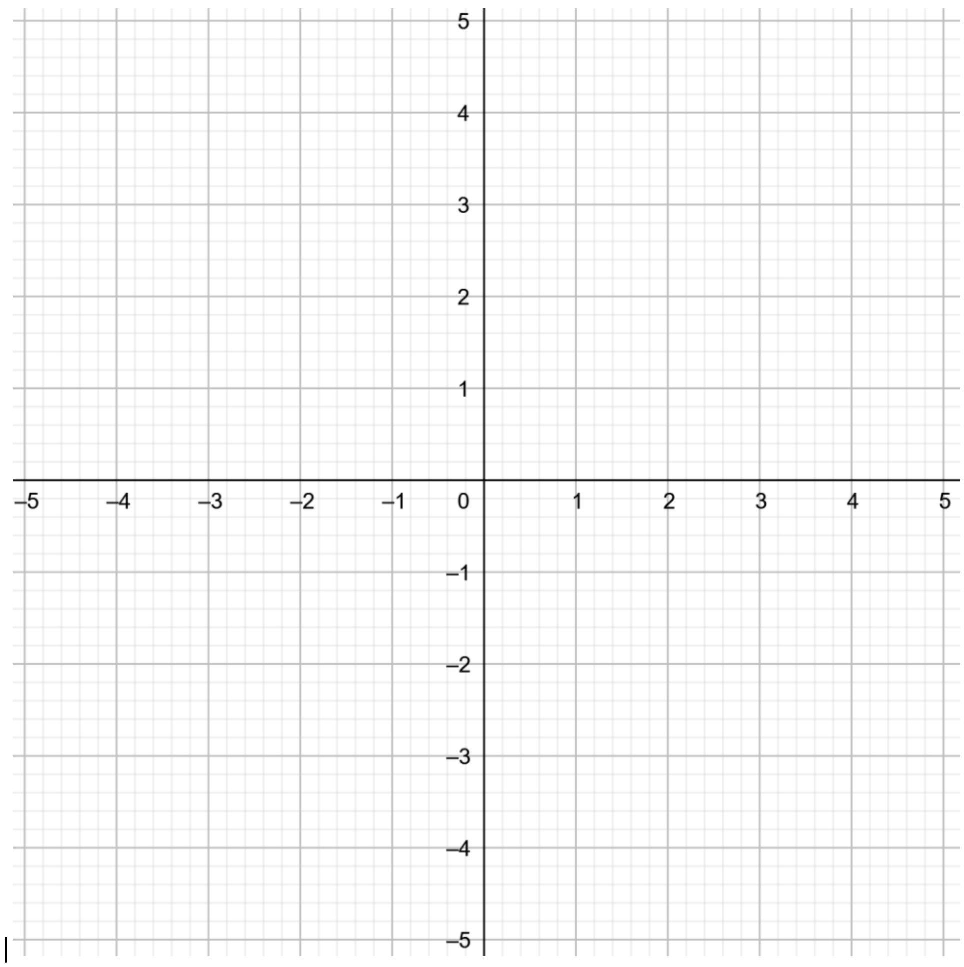
Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 1 es importante que repases, practiques y recuerdes los siguientes conocimientos:

- Sistema de coordenadas cartesianas
- Concepto de función
- Identificación de zonas crecientes y decrecientes



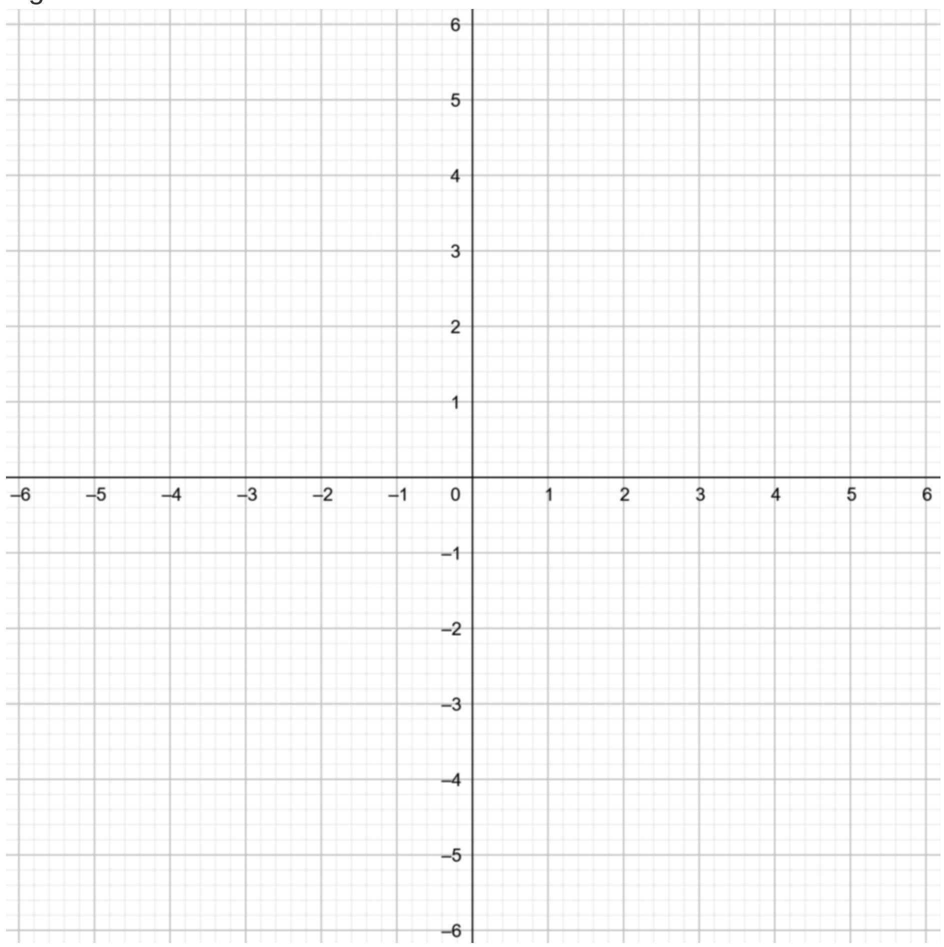
Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

1. En el siguiente plano cartesiano, ubica y escribe el nombre de los cuatro cuadrantes, señala el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas.



2. Ubica las siguientes coordenadas en el plano cartesiano.
   A(1, 3), B(7, 0), C(1, -3), D(1, -1) E(-6, -1), F(-6, 1), G(1,1), une A con B, B con C y así sucesivamente hasta llegar al punto A nuevamente.

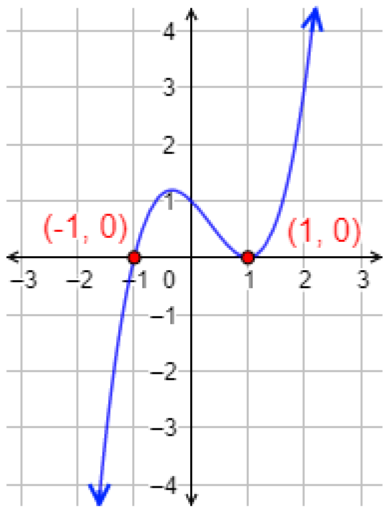
   ¿Qué figura se forma?



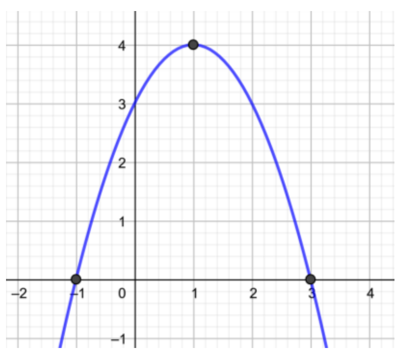
3. ¿Qué entiendes por representación gráfica de una función?

4. Identifica los intervalos donde son crecientes y los intervalos donde son decrecientes las siguientes funciones.

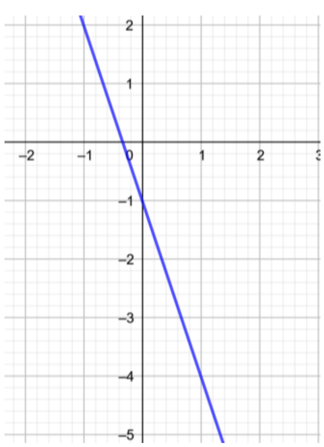
a)



b)



c)



- https://youtu.be/kzOzYY-T-50

A continuación, encontrarás una serie de contenidos que te servirán de apoyo para el logro del propósito del corte 1.

Función

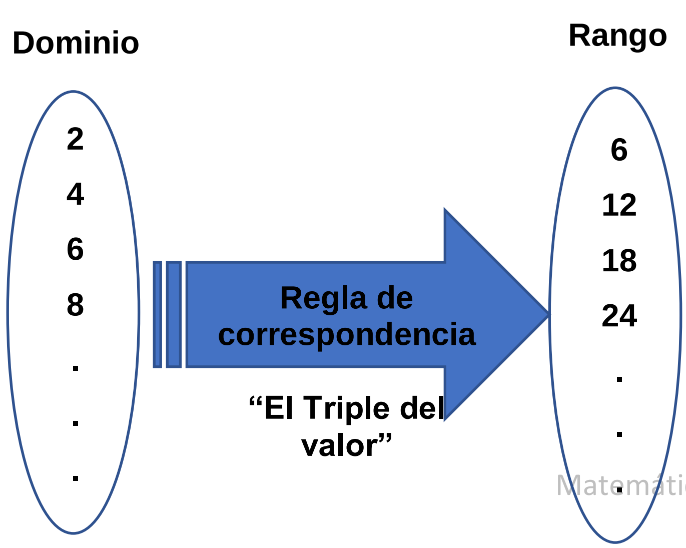
Puede ser que creas que desconocer a qué se refiere el término de función, sin embargo, en la vida diaria existen diversos contextos en los cuales se aplica la noción de función sin percatarnos, ya que existe una relación de correspondencia entre un par de magnitudes, por ejemplo, los kilos de tortillas comprados y el pago respectivo, la distancia recorrida y la gasolina gastada por un automóvil, la tabla de costos correspondiente a la cantidad de boletos del metro comprados, etc.

Las funciones tienen aplicación en una gran variedad de contextos, no solo en las matemáticas, la propiedad que tienen de establecer la relación existente entre dos magnitudes les confiere utilidad en la Física, Biología, Química, Economía, Medicina, Sociología, Psicología, entre muchas otras, además permite “predecir” valores por la relación establecida entre dos magnitudes.

Una función es la dependencia de los valores entre un par de conjuntos, la cual se genera a través de una regla de correspondencia.

Elementos de una función

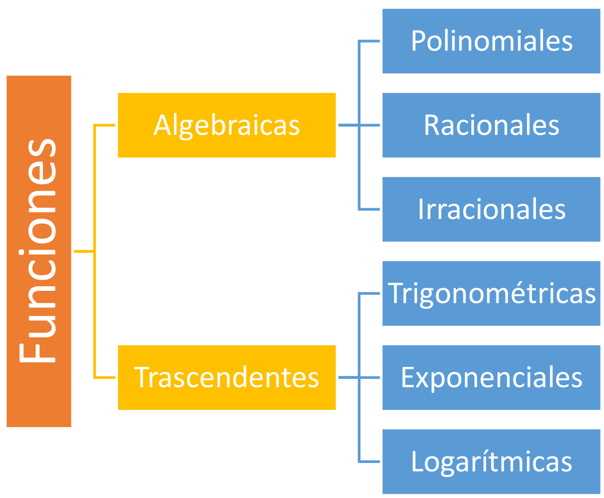
Los principales elementos de una función son los valores que pueden tomar la variable independiente y la variable dependiente, así como la regla de correspondencia



- Dominio: Es el conjunto de valores que puede adoptar la variable independiente, el cual puede identificarse con la letra $\boldsymbol{D}$.
- Rango: También se conoce como imagen o recorrido. Se refiere al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente o la función, se reconoce con la letra $\boldsymbol{R}$.
- Regla de correspondencia: es la relación que establece la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Es común que las funciones se nombren como f y que su valor dependa de la variable independiente x, por lo que la notación utilizada es f(x), que se lee: f de x, se pueden utilizar otras literales para nombrar a la función y a la variable independiente, en ocasiones se emplean las letras de acuerdo con el contexto de la situación.

Clasificación de funciones



CONOCE +

- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:caracteristicas-de-una-funcion

Funciones Polinomiales

Las funciones polinomiales $f(x)$ son aquellas cuya expresión es un polinomio. Una función polinomial de grado n se pueden reconocer con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

El dominio de las funciones polinomiales es todo el conjunto de los números reales y estas son continuas en todo su dominio, el contradominio depende del tipo de función polinomial del que se trate.

Existen muchos tipos de funciones polinómicas, entre las más comunes están: funciones constantes, funciones de primer grado o lineales, funciones de segundo grado o cuadráticas y funciones de tercer grado o cúbicas.

El grado de las funciones polinomiales estará dado por el mayor de los exponentes que se encuentren en su expresión.

De la siguiente función se puede decir que es una función de tercer grado, ya que el exponente más grande es tres, además es una función con cuatro términos.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

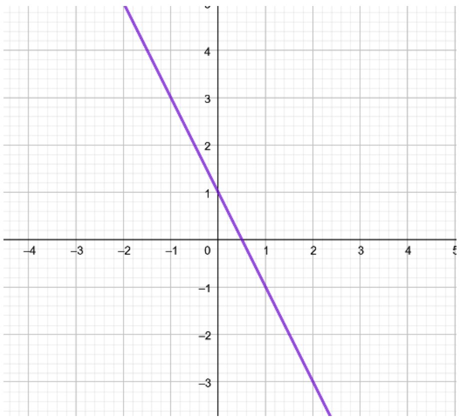
Observa la forma de la expresión y de la gráfica según el grado al que corresponde:

- Función de primer grado: $f(x) = 5x + 2$
- Función de segundo grado: $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$
- Función de tercer grado: $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$

La forma gráfica que tienen las funciones polinomiales depende del grado de la función, por lo que se puede concluir lo siguiente:

- Cruces con el eje x. Las funciones polinomiales cruzan el eje horizontal como máximo una cantidad de veces igual que el grado del polinomio
- Puntos críticos: El número de puntos máximos y mínimos locales es, igual o menor al grado de la función menos uno.
  Tiene como máximo una cantidad de puntos de inflexión (punto donde la gráfica cambia de concavidad) igual al grado del polinomio menos dos.

Función lineal o función polinomial de primer grado

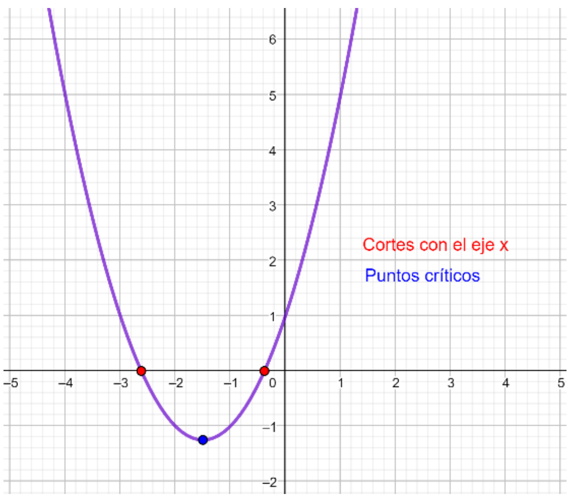


Expresión: $f(x) = mx + b, con\, m \neq 0$
Dominio: los números Reales
Rango: los números Reales
Grado: 1

Análisis gráfico
Cruce con el eje x: La función cruza en una sola ocasión al eje horizontal.

Puntos críticos: la función no presenta puntos máximos o mínimos, tampoco se pueden observar cambios de concavidad.

Función polinomial de segundo grado o función cuadrática



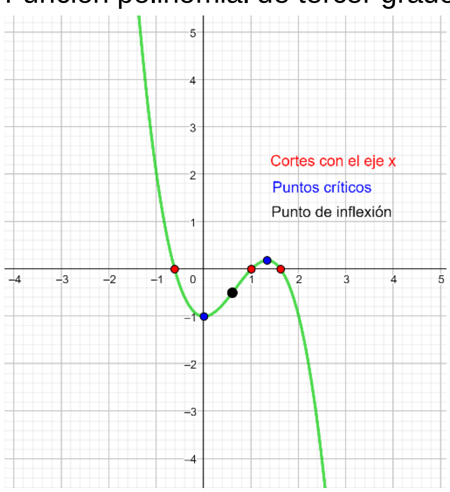
Expresión: $f(x) = ax^2 + bx + c, con\, a \neq 0$
Dominio: los números Reales
Rango: determinado por la ubicación del vértice
Grado: 2

Análisis gráfico
Cortes con el eje x: La función puede cruzar máximo en dos ocasiones el eje horizontal.

Puntos críticos: La gráfica presenta un punto mínimo (vértice).

Puntos de inflexión: La función no presenta.

Función polinomial de tercer grado o función cúbica



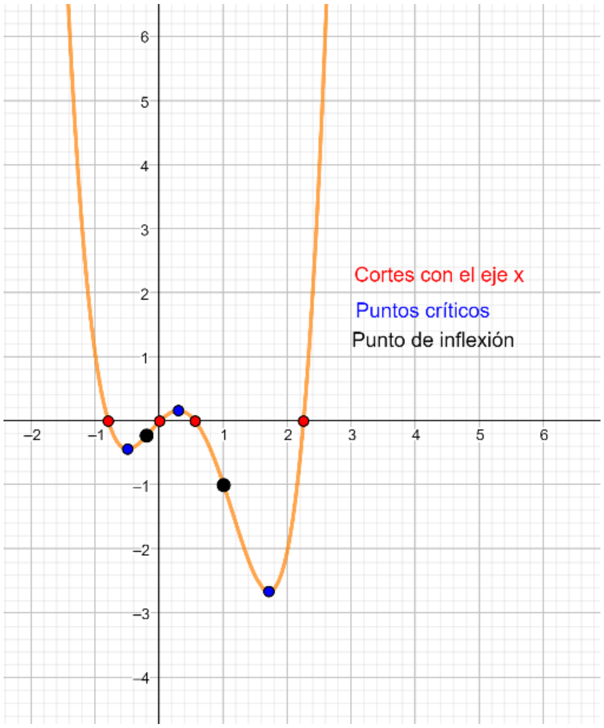
Expresión: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, con\, a \neq 0$
Dominio: los números Reales
Rango: los números Reales
Grado: 3

Análisis gráfico
Cortes con el eje x: La función puede cruzar máximo en tres ocasiones el eje horizontal.

Puntos críticos: La función presenta un punto mínimo y un punto máximo.

Puntos de inflexión: La función presenta un punto de inflexión que se ubica en donde la función cambia de concavidad.

Función polinomial de cuarto grado



Expresión: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c, con\ a \neq 0$
Dominio: los números Reales
Rango: depende de la ubicación de sus puntos máximos o mínimos.
Grado: 4

Análisis gráfico
Cortes con el eje x: La función puede cruzar máximo en cuatro ocasiones el eje horizontal.

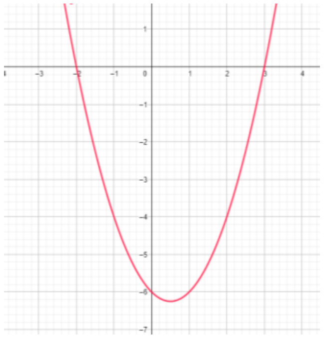
Puntos críticos: La función presenta dos puntos mínimos y un punto máximo.

Puntos de inflexión: La función presenta dos puntos de inflexión que se ubica en donde la función cambia de concavidad.

- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:caracteristicas-de-una-funcion
- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-algebraicas

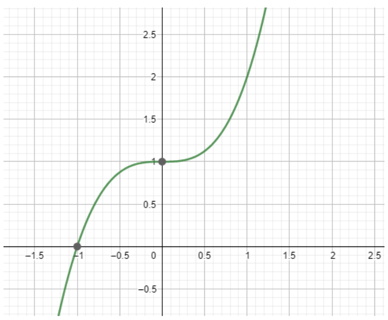
Actividad de aprendizaje 1

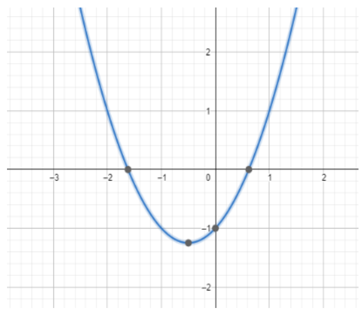
1. Completa la siguiente tabla con la información de las funciones polinómicas

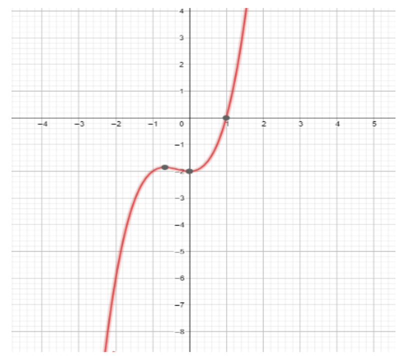
Nombre de la Función	Expresión o ejemplo	Grado	Dominio y rango	Gráfica	Intersección con los ejes x, y
Lineal		1			
	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $g(x) = x^2 - x - 6$				$x_1 = -3, x_2 = 2,$ $y = -6$

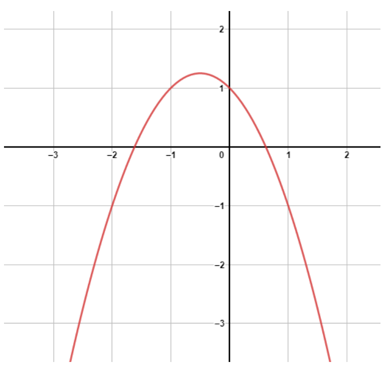
Nombre de la Función	Expresión o ejemplo	Grado	Dominio y rango	Gráfica	Intersección con los ejes x, y
Cúbica			Dominio: R Rango: R		
		4	Dominio: R Rango: R		

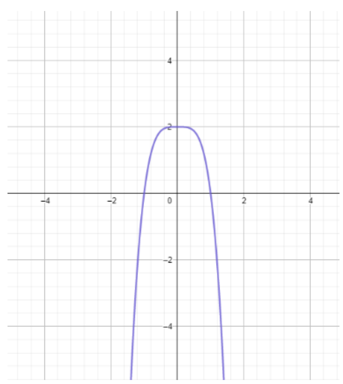
2. Relaciona cada una de las siguientes funciones polinomiales con la gráfica correspondiente.[1]
   1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$
   2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$
   3) $f(x) = -2x^4 + 2$
   4) $f(x) = x^3 + 1$
   5) $f(x) = x^2 + x - 1$
   6) $f(x) = -x^2 - x + 1$

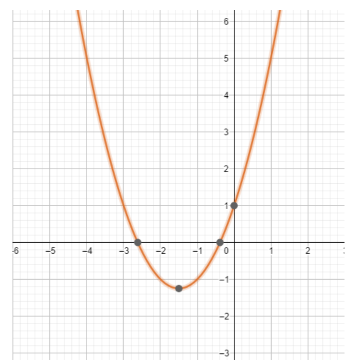
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

[1] Modificado de Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa, 2019, Guía para el examen de Matemáticas IV, p.p. 8,9

Funciones Trascendentes

Las funciones trascendentes son aquellas que no se expresan por medio de un polinomio, o un cociente de polinomios o un radical de polinomios. Algunos tipos de funciones trascendentes son:

- Funciones trigonométricas
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas

Funciones trigonométricas

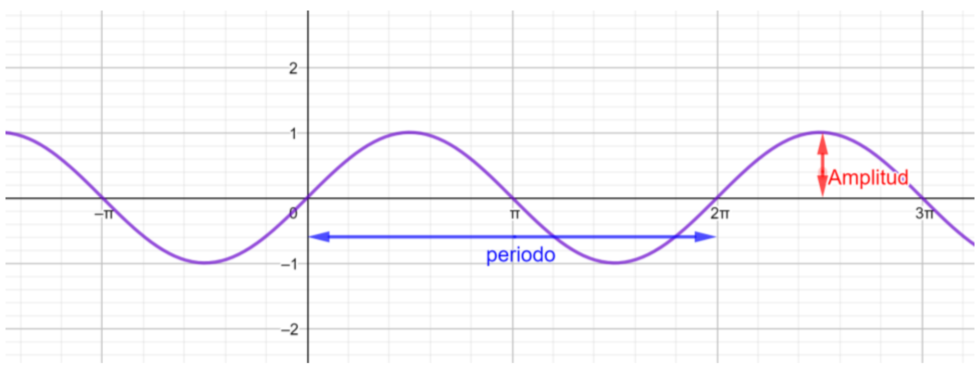
Las funciones trigonométricas son frecuentemente utilizadas para describir fenómenos de nuestro entorno que tienen comportamientos periódicos, tales como, movimiento circular uniforme, señales luminosas de un faro, el movimiento de un péndulo, los latidos de un corazón, la respiración de una persona en reposo, el movimiento de una rueda, las ondas luminosas o de sonido, entre muchos otros.

Las funciones trigonométricas son: $sen\ x$, $cos\ x$, $tan\ x$, $cot\ x$, $sec\ x$ y $csc\ x$.

Función seno

La función seno está representada por la expresión: $f(x) = sen\ x$, que se lee como "f de x es igual a sen de x", donde x es la variable independiente y representa el valor de un ángulo.

Gráfica



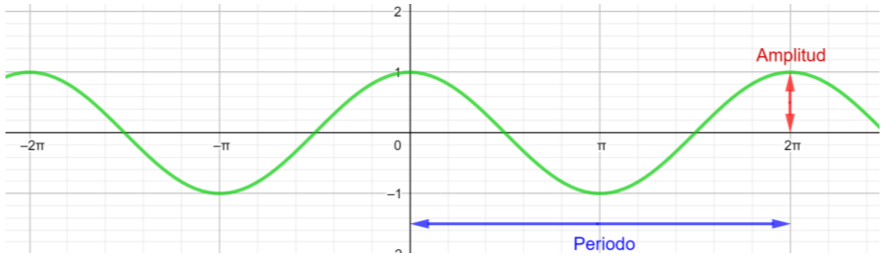
Dominio: los números reales
Rango: (-1, 1)
Función continua en todo su dominio
Función periódica, Periodo: 2π
Amplitud: 1
Función simétrica respecto al origen

Características que debes observar: $f(0) = sen\ 0 = 0$, lo anterior significa que cuando x toma el valor de cero, la función $seno$ también vale cero, lo cual puedes observarlo en la gráfica anterior.

Como puedes observar el valor máximo de la función $sen\ x$ es 1 y el valor mínimo es -1, es decir, la función solo existe en ese intervalo.

Función coseno
Expresión: $f(x) = cos\ x$

Gráfica



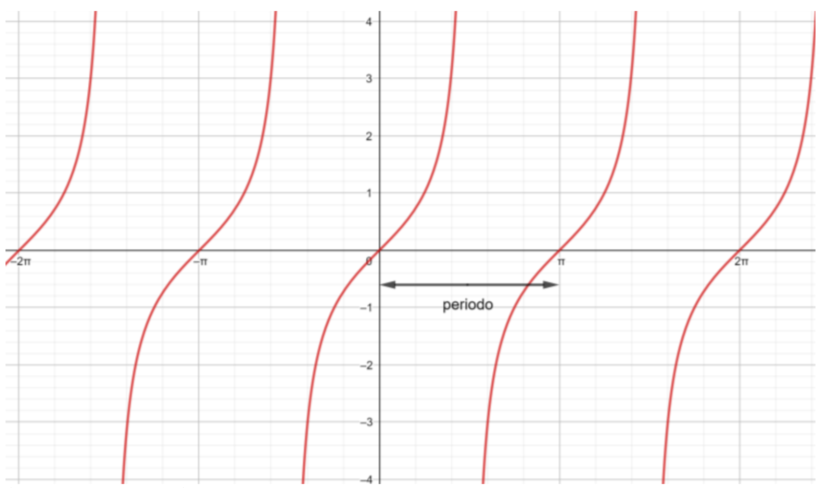
Dominio: los números reales
Rango: (-1, 1)
Función continua en todo su dominio
Función periódica, Periodo: 2π
Amplitud: 1
Simétrica respecto al eje y

Características que debes observar: $f(0) = \ cos\ 0 = \ 1$, lo anterior significa que cuando x toma el valor de cero, la función $coseno$ adopta el valor de 1.

Al igual que la función seno, el valor máximo que puede tener $cos\ x$ es 1 y el valor mínimo es -1, esta función solo existe en ese intervalo. Para poder diferenciar las gráficas de seno y coseno, te puedes apoyar en el valor que tienen cuando $x = 0$.

Función tangente
Expresión: $f(x) = tan\ x$

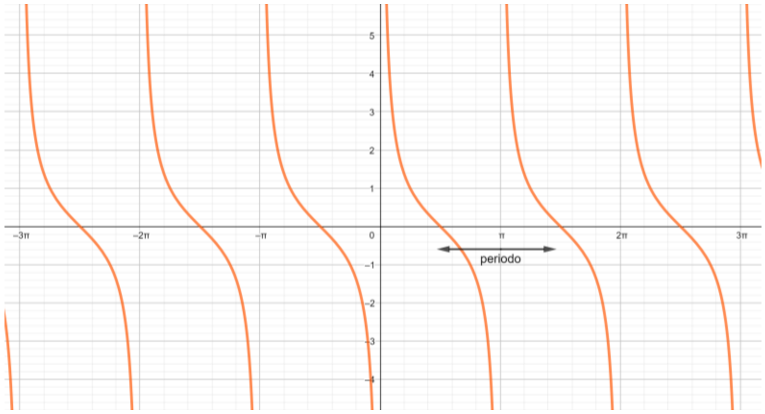
Gráfica



Dominio: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi |\ n \in Z\right\}$
Rango: los números reales
Función discontinua en $\frac{\pi}{2} + n\pi |\ n \in Z$
Función periódica, Periodo: π
Cruces con los ejes: corta el eje x en $n\pi$, con $n \in Z$, cruza el eje y en 0
Simétrica respecto al origen

Función cotangente
Expresión: $f(x) = cot\ x$

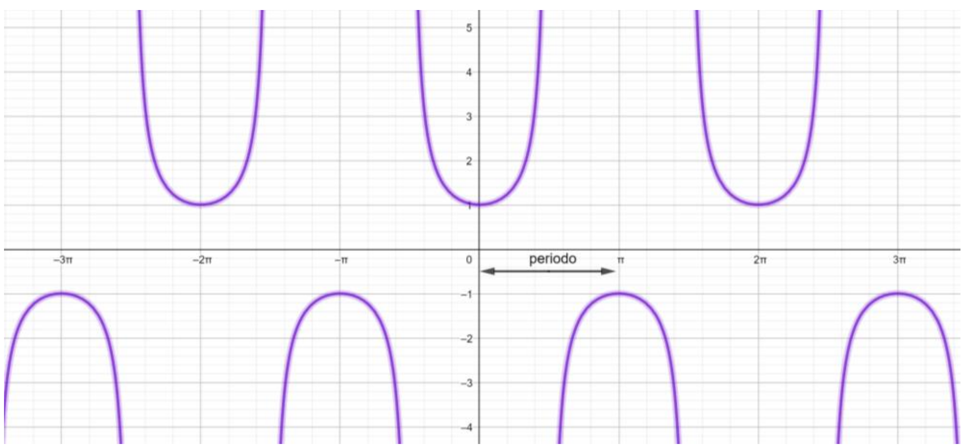
Gráfica



Dominio: $R - \{\pi + n\pi |\ n \in Z\}$
Rango: todos los números reales
Función discontinua en $\pi + n\pi |\ n \in Z$
Función periódica, Periodo: π
Cruces con los ejes: cruza el eje x en $\frac{\pi}{2} + n\pi$, con $n \in Z$, no cruza el eje y
Simétrica respecto al origen

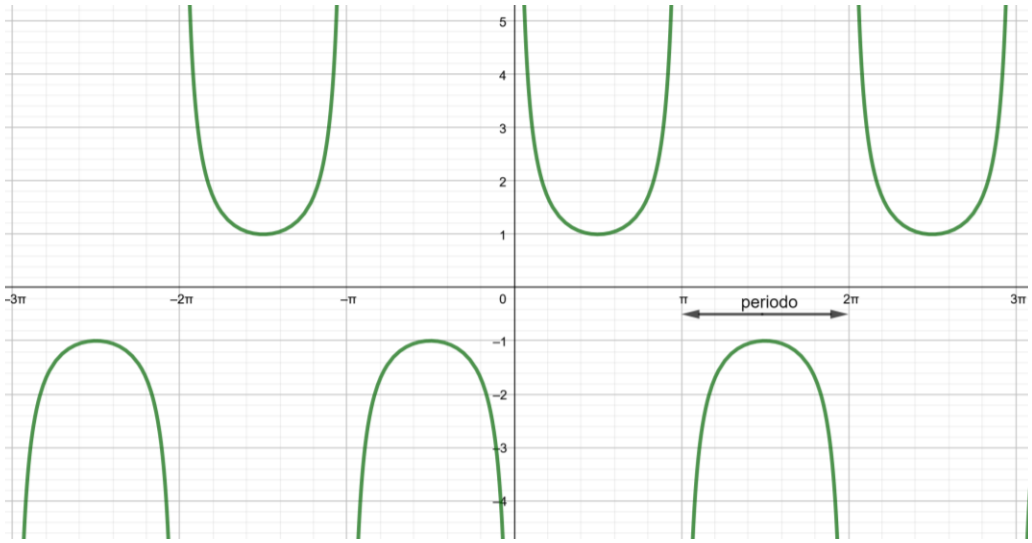
Función secante
Expresión: $f(x) = sec\ x$

Gráfica



Dominio: $R - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi |\ n \in Z\right\}$
Rango: $R - (-1, 1)$
Función periódica, Periodo: π
Cruces con los ejes: no cruza el eje x, cruza el eje y en el punto (0, 1)
Simétrica respecto al eje y.

Función cosecante
Expresión: $f(x) = csc\ x$



Dominio: $R - \{n\pi |\ n \in Z\}$
Rango: $R - (-1, 1)$
Función periódica, Periodo: π
Cruces con los ejes: cruza ninguno de los ejes.
Simétrica respecto al origen

- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-trascendentes#x5828d8a71717b83a:funciones-trigonometricas

- https://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/seno.html#:~:text=Las%20caracter%C3%ADsticas%20fundamentales%20de%20la,%CF%80%20con%20k%E2%88%88Z%20

- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-trascendentes

Función exponencial

¿Recuerdas haber escuchado en las noticias o en tus clases que algún fenómeno tiene comportamiento exponencial?, ¿Entendiste a qué se refiere? Las funciones exponenciales se aplican para describir y comprender fenómenos de diversas áreas, como sociales, financieros, naturales y de la salud. Algunos de los fenómenos que pueden tener comportamiento exponencial son: la vida media de sustancias radioactivas, el crecimiento o decrecimiento de poblaciones humanas, crecimiento o decrecimiento de colonias de bacterias, el aumento de casos de alguna enfermedad o el interés compuesto.

A continuación, se presentan algunas propiedades y características de la función exponencial.

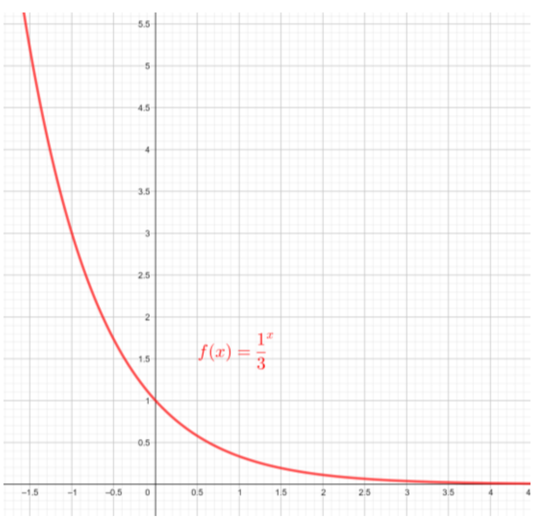
Expresión: $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$

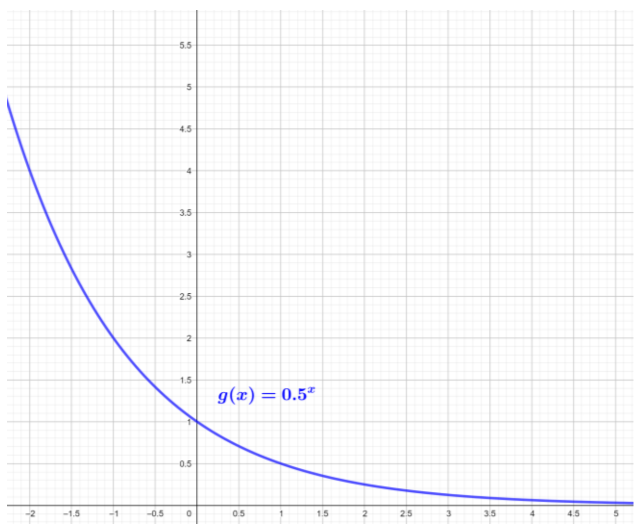
Nota: Lo que debes distinguir de esta expresión es que la variable independiente x se encuentra en el exponente de la función.

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$

Comportamiento gráfico. La forma que tendrá la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ depende del valor que tiene a.

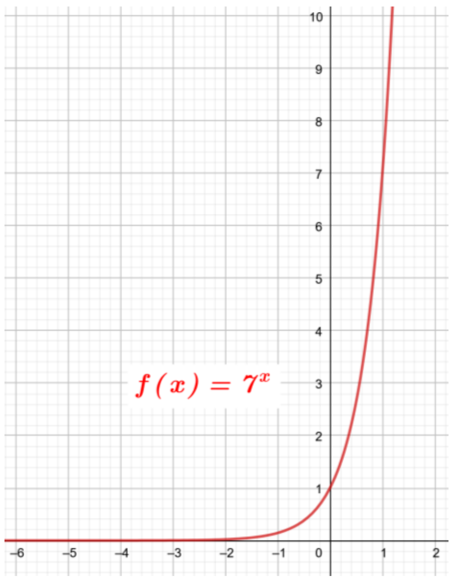
- Si $0 < a < 1$, su comportamiento será decreciente. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

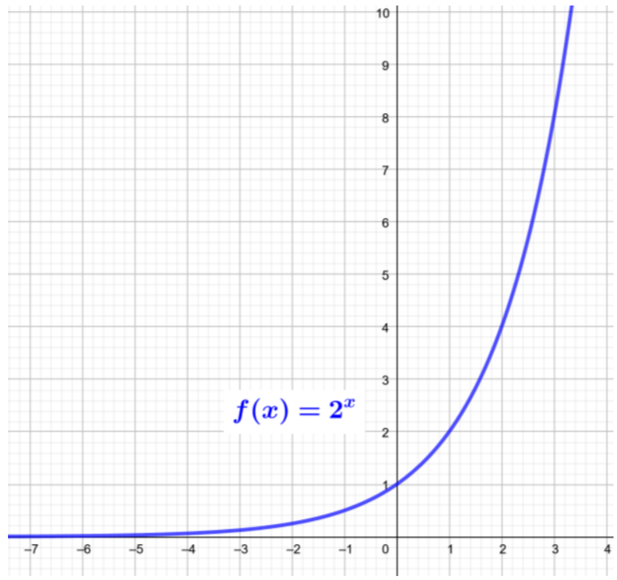




En la gráfica se puede observar que la función es decreciente, es decir, la parte izquierda es alta y decrece rápidamente a medida que avanza en el eje x, hasta que la parte derecha sigue decreciendo, llegando a ser casi horizontal.

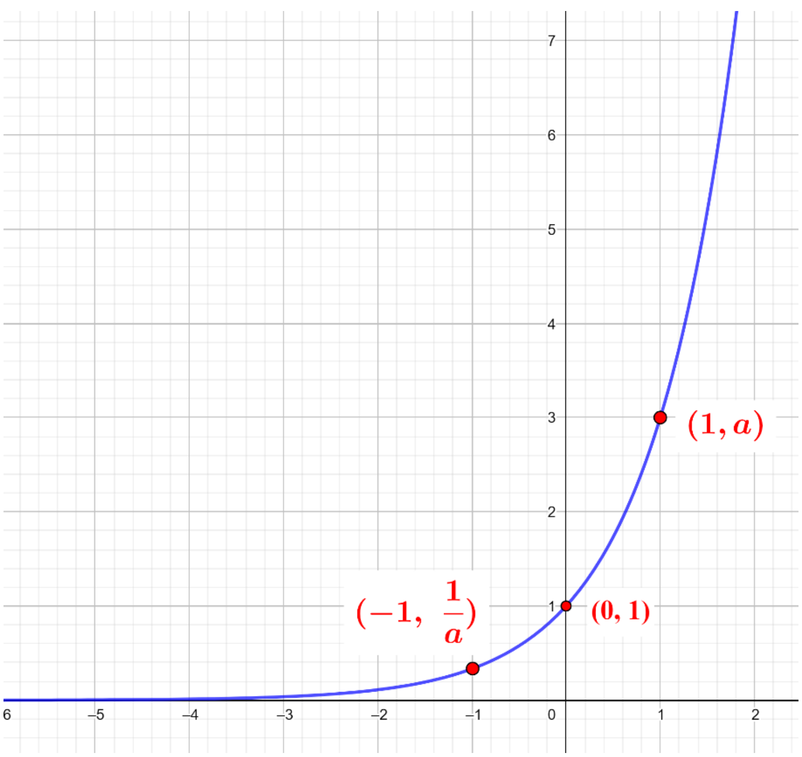
- Si $a > 1$





Observa el comportamiento gráfico que tiene la función, en la parte izquierda es prácticamente horizontal, y una vez que para el punto (0, 1) crece muy rápido hasta casi alcanzar la vertical.

Es importante señalar que, aunque parezca que las gráficas de las funciones exponenciales tocan el eje horizontal, eso nunca sucede, ya que tienen un comportamiento asintótico.



Por la naturaleza de las potencias, se puede determinar que existen puntos específicos por los que pasan las funciones exponenciales:

- $(0, 1)$, cuando $x = 0$, la función queda como $f(0) = a^0 = 1$
- $(1, a)$, cuando $x = 1$, la función queda como $f(1) = a^1 = a$,
- $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, cuando $x = -1$, la función queda como $f(1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Los puntos anteriores pueden reconocerse en cualquier función exponencial de la forma: $f(x) = a^x$, y puedes utilizarlos para realizar un bosquejo rápido de la función.

Ejemplo
Grafica la siguiente función $f(x) = 2.5^x$

Como se ha visto anteriormente, las funciones se pueden representar por medio de expresiones algebraicas y de gráficas, pero hay otra forma de representarlas y es la forma tabular. La cual es muy útil cuando se quiere trazar una gráfica.

Las tablas se construyen dando valores a la variable independiente x, y calculando el valor de la función con base en la expresión.

La cantidad de valores que se ponen en la tabla depende de las características de la función y de la gráfica que se quiera obtener, para la función $f(x) = 2.5^x$ se sugieren los siguientes valores:

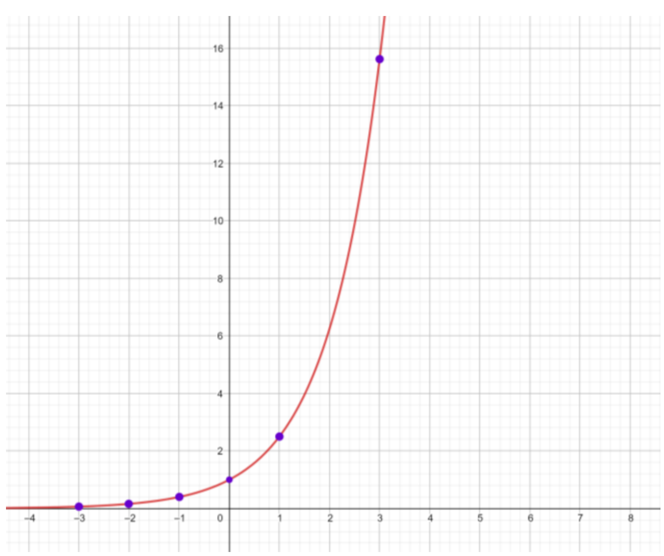
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2.5^x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{(x, f(x))}$
-3	$f(-3) = 2.5^{-3}$	0.06	(-3, 0.06)
-2	$f(-2) = 2.5^{-2}$	0.16	(-2, 0.16)
-1	$f(-1) = 2.5^{-1}$	$\frac{1}{2.5}$	(-1, $\frac{1}{2.5}$)
0	$f(0) = 2.5^0$	1	(0, 1)
1	$f(1) = 2.5^1$	2.5	(1, 2.5)
2	$f(2) = 2.5^2$	6.25	(2, 6.25)
3	$f(3) = 2.5^3$	15.63	(3, 15.63)

NOTAS. Recuerda que la sustitución del valor de x en las funciones exponenciales se realiza en el exponente.

Usualmente la segunda y la cuarta columna no se utilizan, en este caso se colocan para dar claridad al ejemplo.

Recuerda que, de acuerdo con lo analizado, podemos conocer algunos valores de la función incluso son calcularlos. En la tabla se colocan de color rojo.

Ahora, ya se puede realizar la gráfica ubicando los valores de la última columna de la tabla. Recuerda que el valor de x se representa en el eje horizontal y f(x) en el vertical.



Al mirar la gráfica, ¿se puede dar sentido a las características que se enlistaron anteriormente?

- ¿Cuál es el dominio de la función?
  Para contestar esta pregunta se puede analizar la expresión de la función $f(x) = 2.5^x$,¿es posible sustituir cualquier valor de x en la función?, ¿números negativos, positivos, fraccionarios, decimales? Puedes hacer la prueba en tu calculadora.
  En realidad, cualquier valor del conjunto de los números reales (∞, -∞) hace válida a la función y se obtiene un valor, por lo que, su dominio es $x \in R$

- ¿Cuál es el rango de la función?
  El rango se refiere a los valores que puede adoptar la función, como se puede observar en la gráfica de la función, ésta no existe en los números negativos de y, por lo que, el rango es: R^+o $(0, \infty)$

- ¿ $f(x)$ puede valer 0?
  Como se puede observar en la gráfica de la función, a medida que los valores de x se hacen más pequeños el valor de la función se disminuye, es decir, se acerca cada vez más al eje, sin embargo, no lo toca. Podrías probar sustituir en x valores más pequeños, por ejemplo -10, -15, etc. ¿Qué pasa con estos valores?

- Analiza el "ritmo de crecimiento" de la función
  Observa con atención la gráfica de la función, ¿cómo se comporta la función a la izquierda del eje y? Observa como va creciendo, pero esto sucede muy lentamente, solo un poco más a medida que se acerca al eje y; pero ¿qué sucede una vez la función pasa el eje? La función empieza a acelerar su crecimiento a medida que el valor de x va creciendo.

  Este modelo de crecimiento de la función es característica de la función exponencial.

CONOCE +

- http://uapas1.bunam.unam.mx/matematicas/funcion_exponencial_interes/
- https://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/exponenciales.html

Actividad de aprendizaje 2

1. ¿Cuál de las siguientes funciones son funciones exponenciales? Argumenta tu respuesta en cada caso.

   a) $f(x) = ln\ (x)$

   b) $g(x) = (3x)^2$

   c) $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

   d) $j(x) = e^x$

2. Los estudios biológicos sobre un tipo de amiba determinaron que su crecimiento está dado por la siguiente expresión[2]:

$$f(x) = 3^x$$

Donde:
x: tiempo en horas
f(x): cantidad de amibas

Con base en esta información, contesta lo que se te pide

a) Completa la tabla.

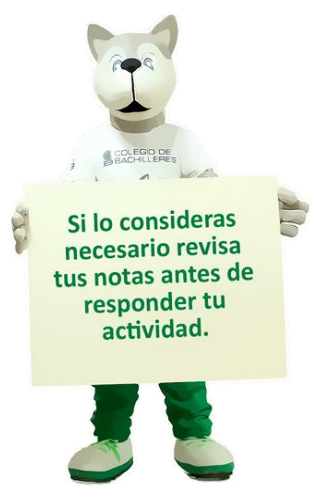
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 3^x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{(x, f(x))}$
0	$f(0) = 3^0$	1	(0, 1)
1	$f(1) = 3^1$	3	(1, 3)
2	$f(2) = 3^2$	9	(2, 9)
3	$f(3) = 3^3$	27	(3, 27)
4	$f(4) = 3^4$	81	(4, 81)
5	$f(5) = 3^5$	243	(5, 243)
6	$f(6) = 3^6$	729	(6, 729)

b) Realiza la gráfica de la función

[2] Ejercicio adaptado de Guía de Matemáticas II

c) ¿Cuántas amibas habrá al paso de 4 h?

d) ¿Cuál es el tipo de función (exponencial o logarítmica) que representa este fenómeno?



Función logarítmica

Alguna vez has comparado los daños hechos por los sismos y no comprendes por qué, a pesar de ser de intensidades “parecidas” la magnitud de los daños no coinciden. Una de las razones puede ser la naturaleza logarítmica de la escala de Richter (escala más frecuentemente utilizada para medir la intensidad de los sismos).

Los logaritmos comúnmente se utilizan para comunicar y comparar magnitudes extremadamente grandes de una forma práctica, ya que de otra manera sería complicado dimensionarlas.

La expresión de las funciones logarítmicas es:

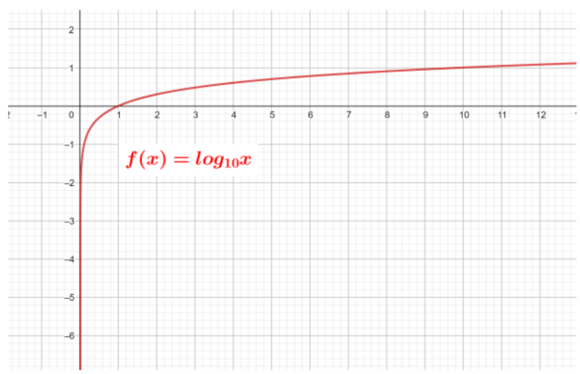
$f(x) = log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$

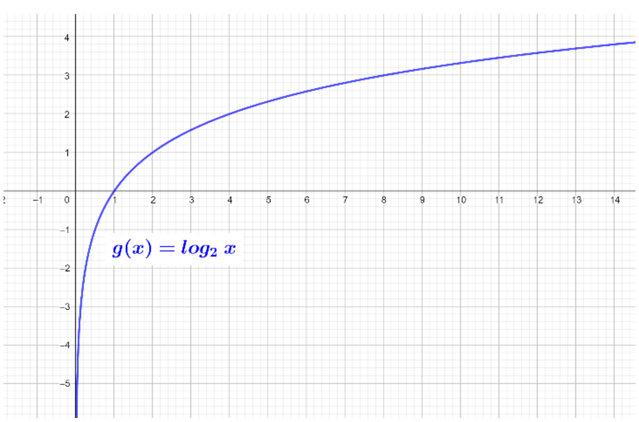
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

Nota. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, estudiada anteriormente, por lo que podrás encontrar relación entre algunas de sus características.

Al igual que en las funciones exponenciales, el comportamiento de las funciones logarítmicas cambia dependiendo del valor de a. En seguida, se muestran las gráficas que representan dicho comportamiento.

Para $a > 1$





Para poder generar las diferentes funciones, es necesario cambiar el valor de a, que es la base del logaritmo de la función.

Las gráficas mostradas difieren entre si, por el cambio de la base:

$$f(x) = log_{10} x$$

$$g(x) = log_2 x$$

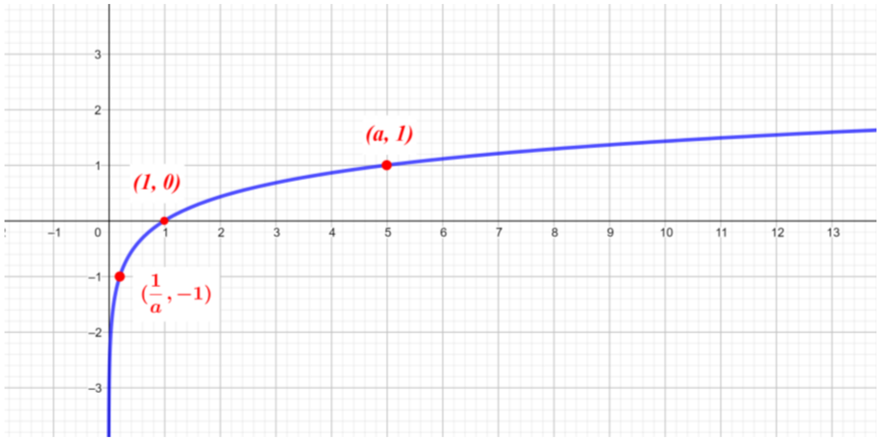
Para $0 < a < 1$

Las gráficas mostradas difieren entre si, por el cambio de la base:

$$f(x) = log_{\frac{1}{3}}\ x$$

$$g(x) = log_{0.7}\ x$$

Puntos característicos de la grafica



Los puntos señalados en la gráfica pueden ubicarse en cualquier función de la forma $f(x) = log_a x$ y te servirán para identificar rápidamente si la gráfica corresponde a una función logarítmica o para trazar un esbozo de la gráfica.

CONOCE +

- https://youtu.be/C0vUje9Uduc
- https://youtu.be/0Cm-q5KH5jY

Ejemplo

Grafica la siguiente función $j(x) = log_2(x-1)$

Se sugieren los siguientes valores, como base para definir los valores de la variable independiente, primero se iguala a 0 el argumento del logaritmo, ya que a partir del cero es que la función algoritmo puede existir:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

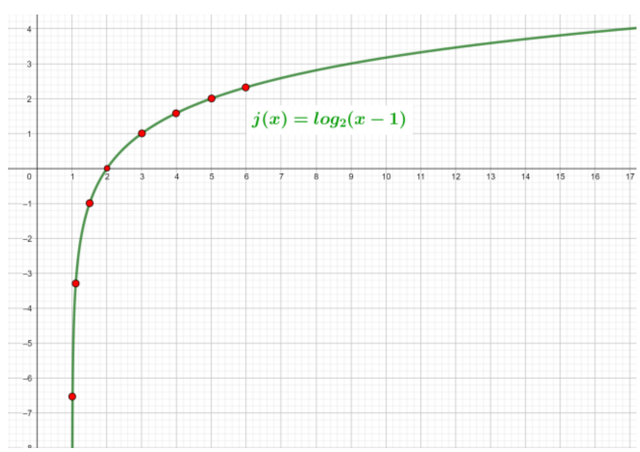
Como la solución de la ecuación es 1, los valores que pueden sustituirse en la función deben ser mayores a este valor.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{j(x) = log_2(x-1)}$	$\boldsymbol{j(x)}$	$\boldsymbol{(x, j(x))}$
1.01	$j(x) = log_2(1.01-1)$	-6.6	(1.01, -6.6)
1.1	$j(x) = log_2(1.1-1)$	-3.3	(1.1, -3.3)
1.5	$j(x) = log_2(1.5-1)$	-1	(1.5, -1)
2	$j(x) = log_2(2-1)$	0	(2, 0)
3	$j(x) = log_2(3-1)$	1	(3, 1)
4	$j(x) = log_2(4-1)$	1.6	(4, 1.6)
5	$j(x) = log_2(5-1)$	2	(5, 2)
6	$j(x) = log_2(6-1)$	2.3	(6, 2.3)

Considera que para obtener el valor del logaritmo es necesario utilizar una calculadora científica o también puedes usar el programa Excel de la computadora.

Otro aspecto para poder calcular los valores de la tabla es:
Primero calcular el argumento, es decir, el valor que se encuentra entre paréntesis.

Para realizar la gráfica se ubican los puntos obtenidos en el plano cartesiano, recuerda que el valor de x se representa en el eje horizontal y los valores de la función j(x) se grafican en el eje vertical.

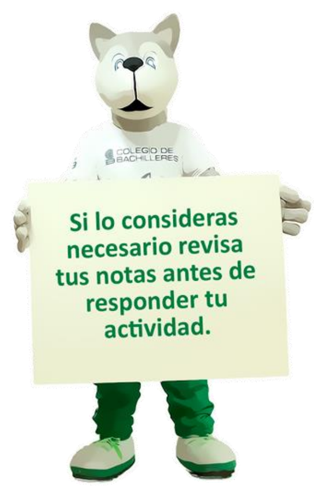


Actividad de aprendizaje 3

Grafica las siguientes funciones indicando en cada una el dominio y rango.

a) $f(x) = log(x + 2)$

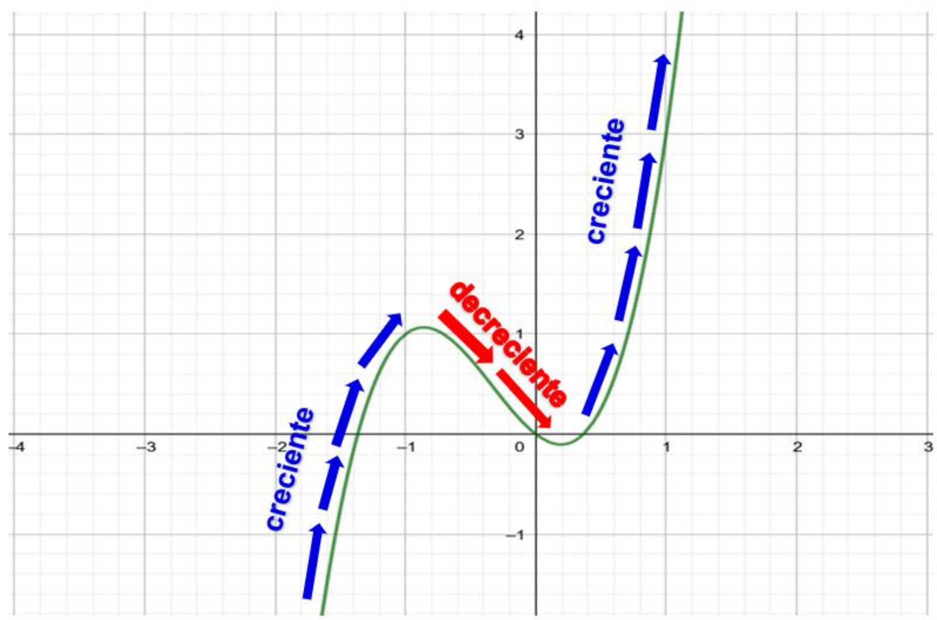
b) $f(x) = log_3\ x$



Intervalos de Crecimiento y decrecimiento de una función

Para poder analizar el comportamiento gráfico de una función es necesario que considerar cómo se lee la gráfica de una función.

Las gráficas se leen de izquierda a derecha, para que lo recuerdes rápidamente, en el mismo sentido en el que se lee una palabra. Imagina que recorres la gráfica de izquierda a derecha, ¿cuál es el comportamiento de cada "pedazo" de la gráfica? En la siguiente figura se muestra el recorrido y el comportamiento se cada segmento.

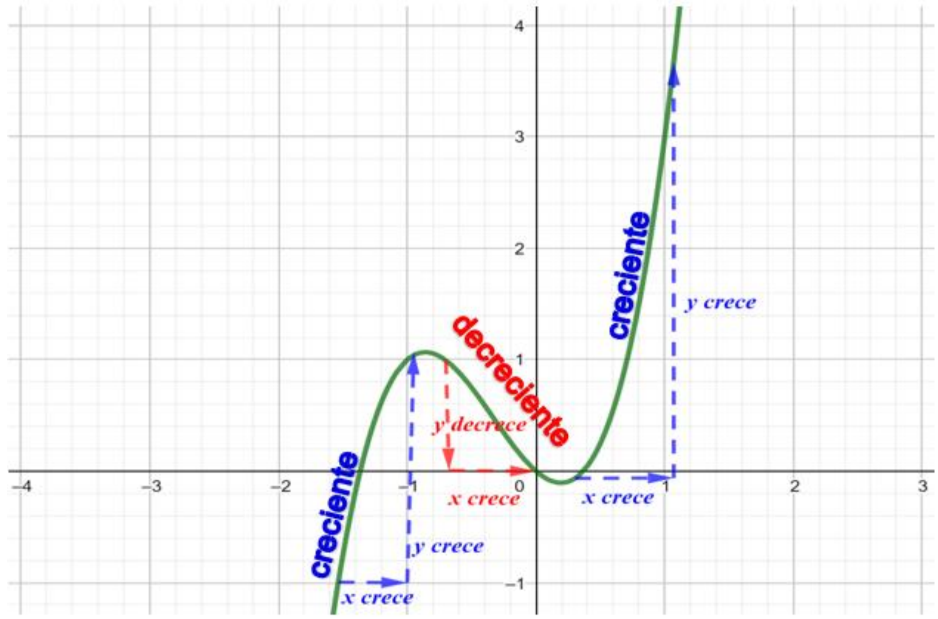


Lo anterior se puede determinar a partir del cambio de valor de x y de $f(x)$,

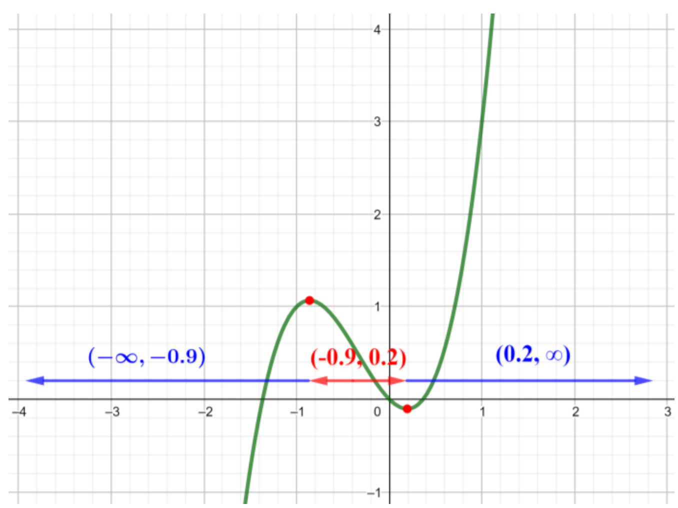
$f(x)$ es creciente, cuando el valor de x crece, el valor en y también crece.
$f(x)$ es decreciente, cuando el valor de x crece, el valor en y decrece

Recuerda que el valor de x, en el eje horizontal, cuando se desplaza a la derecha, mientras que, y crece, en el eje vertical, cuando se desplaza hacia arriba.

Con base en este criterio, se presenta el siguiente análisis.



Con ambos criterios se puede determinar cuáles son los puntos en donde la función cambia de dirección y a partir de ellos se pueden determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Los intervalos se ponen en términos del valor x.



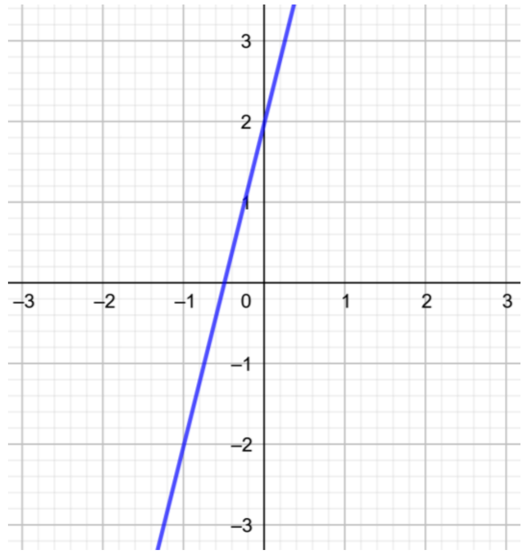
La función crece en: $(-\infty, -0.9\ )$ y $(0.2, \infty)$
La función decrece en: $(-0.9, 0.2)$

- https://youtu.be/dcpst_xi8as
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-diff-analytical-applications-new/ab-5-3/v/increasing-decreasing-intervals-given-the-function

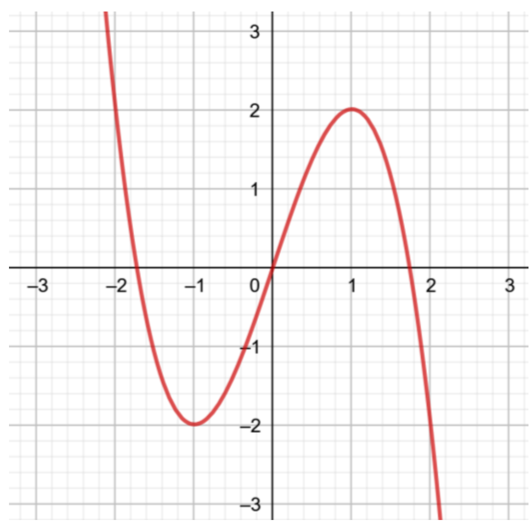
Actividad de aprendizaje 4

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

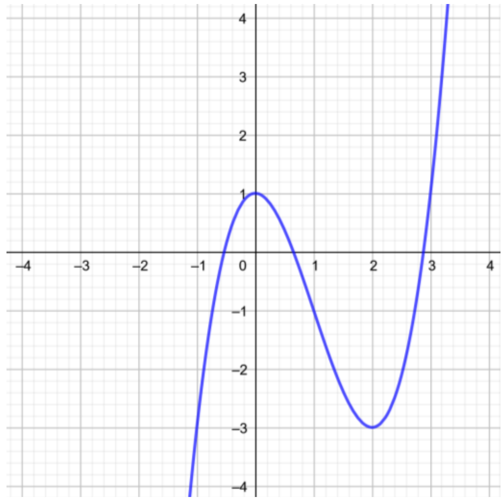
1.



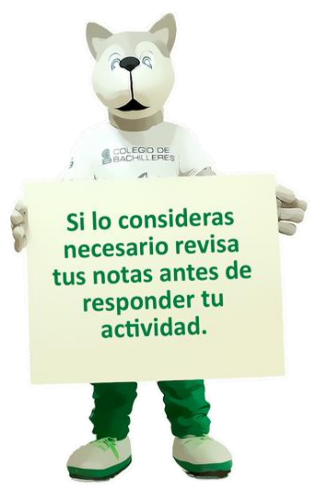
2.



3.



-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4



Si lo consideras necesario revisa tus notas antes de responder tu actividad.

En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte 1.

Aspecto para considerar	Si	No	Cómo puedo realizarlo mejor
• Organicé el tiempo de estudio para la realización de esta guía.			
• Realicé una lectura activa de los ejemplos de la guía.			
• Procuré eliminar las distracciones para realizar las actividades.			
• Realicé anotaciones a lo largo del desarrollo de la guía.			
• Consulté las fuentes sugeridas para los temas que representaron mayor dificultad.			
• Desarrollé detalladamente las actividades de aprendizaje sugeridas.			
• En caso necesario, busqué y realicé más ejercicios para reforzar mi aprendizaje.			

FUENTES CONSULTADAS

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

- Angel A., R. (2004). *Álgebra intermedia.* México: Pearson Educación.
- Guía para el examen de Matemáticas IV. 2019. Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa. https://drive.google.com/file/d/10Usemj2hFtX0eB35BZNHTXi6nnUz3LhX/view
- Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II. Colegio de Bachilleres, 2001. https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_II.pdf
- Khan Academy. Funciones algebraicas. https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-algebraicas. Consultadp en diciembre 2020.
- Khan Academy. Funciones trascendentes. https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-trascendentes. Consultado en diciembre 2020.
- Khan Academy. Funciones crecientes y decrecientes. Funciones crecientes y decrecientes | Khan Academy. Consultado en diciembre de 2020.
- Khan Academy. Funciones trigonométricas. https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:funciones-trascendentes#x5828d8a71717b83a:funciones-trigonometricas. Consultado en diciembre 2020.
- Contreras, J, del Pino, C. Universidad de Talca Instituto de Matemáticas y física. Curso Modelos matemáticos y funciones. https://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/functrigonometricas.pdf. Consultado en diciembre 2020.

FUNCIONES POLINOMIALES BÁSICAS

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos	Aprendizajes esperados.
• Funciones polinomiales básicas	• Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).
• Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas	• Utiliza procesos para la derivación.

PROPÓSITO

Al finalizar este corte analizarás las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas) y las representarás gráficamente, para que identifiques, relaciones y representes las variables de un fenómeno y apliques procedimientos algebraicos de las funciones polinomiales en el estudio y solución de problemas en tu contexto.

RECOMENDACIÓN

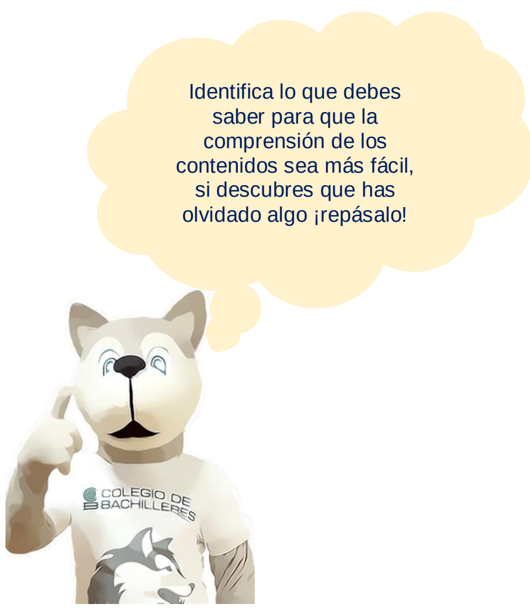
Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Antes de iniciar el estudio del corte 2 debes tener conocimientos elementales por lo que es importante que repases, practiques y recuerdes los siguientes contenidos.

Por lo que es importante que sepas reconocer los:

- Elementos de términos algebraicos: coeficiente, base y exponente.
- Operaciones con polinomios
- Solución de ecuaciones cuadráticas
- Evaluación de funciones



EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

1. En el siguiente término algebraico, escribe los nombres de cada uno de los elementos que lo conforman. Utiliza flechas para identificarlos claramente.

$$-7x^4$$

2. Determina la suma y la resta de los siguientes polinomios

   a) $3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6$ y $x^3 + 3x^2 - x + 6$

   Suma:

   Resta:

   b) $2x^4 - 5x^3 - 3x + 4$ y $4x^4 - 5x^3 - 5x + 4$

   Suma:

   Resta:

c) $3x^5 + x^4 - x^2 + 2$ y $-5x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 4x$

Suma:

Resta:

3. Calcula el resultado de la siguiente operación $(3x^3 - 4x)(8x^3 + 5x^2)$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

b) $-5x^2 - 9x + 2 = 0$

c) $x^2 + 8x + 15 = 0$

d) $-x^2 - 14x - 49 = 0$

5. Determina el valor de las siguientes funciones para los valores determinados en cada caso.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5$, para $x = 1$

b) $k(t) = t^2 + 3$, para $t = -1$

c) $s(h) = \frac{h^2}{h-6}$, para $h = 0$

- https://youtu.be/RLFRKSy1b3s
- https://youtu.be/Yng9FbUK2MY
- https://youtu.be/Y7rvipk5NO4
- https://youtu.be/f2Gzfua7z9s
- https://youtu.be/BxrJmKdPHRs

CONTENIDOS

A continuación, encontrarás una serie de contenidos que te servirán de apoyo para el logro del propósito del corte 2.

Función lineal

La función lineal es un caso particular de las funciones polinomiales, por eso se le nombran también funciones polinomiales de primer grado, su expresión es:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

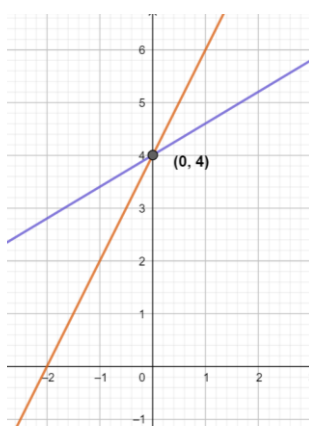
Más comúnmente también se reconoce de la siguiente forma:

$$f(x) = mx + b$$

Donde:
m: pendiente de la recta
b: intersección con el eje y u ordenada al origen

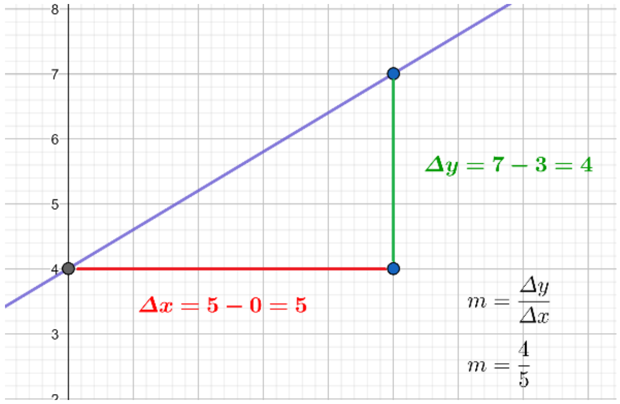
Ambos términos, son muy útiles para graficar una función lineal, ya que $\boldsymbol{b}$, es el valor de la ordenada del punto de corte de la recta con el eje vertical.

Las gráficas de las funciones: $f(x) = 2x + \mathbf{4}$ y $g(x) = \frac{3}{5}x + \mathbf{4}$ son:

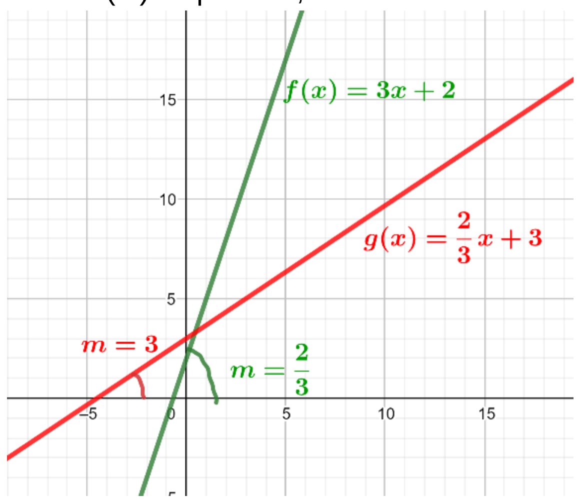


Se puede observar en la gráfica que ambas funciones cruzan el eje vertical en 4, es decir, como el valor de su término independiente, por lo que al observar la ecuación de una función lineal se puede reconocer un punto de la gráfica.

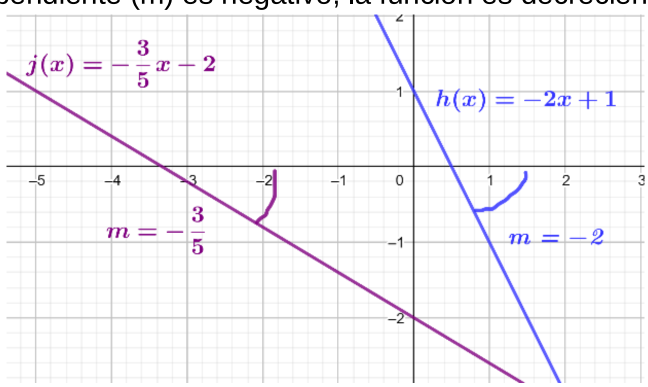
En cuanto a la pendiente m, es la medida de la inclinación de la recta y se puede interpretar como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



- Si el valor de la pendiente -(m) es positivo, la función es creciente

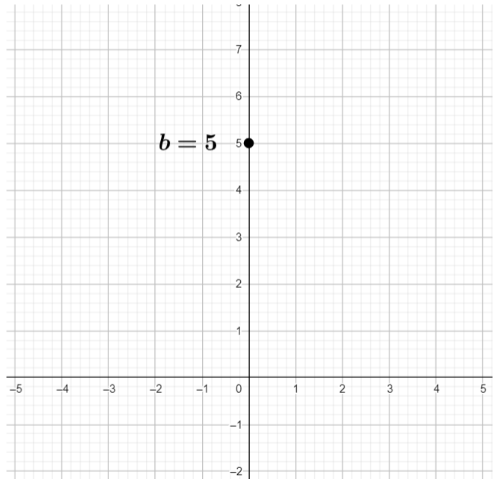


- Si el valor de la pendiente (m) es negativo, la función es decreciente



Si tienes un punto que es parte de la recta y conoces el valor de la pendiente, es muy fácil poder graficar la trayectoria de la recta. Por ejemplo, con $f(x) = -3x + 5$, la expresión de la función proporciona ambos datos m y b, la ordenada al origen $b = 5$, que al ser la ordenada donde la recta corta el eje vertical, es un punto de la recta, con coordenadas (0, 5) y la pendiente $m = -3$.

Inicialmente se grafica la ordenada al origen $b = 5$, recuerda que es el punto en donde la recta cruza el eje vertical.



A partir de ese punto se grafica la pendiente, ten en cuenta la definición de la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

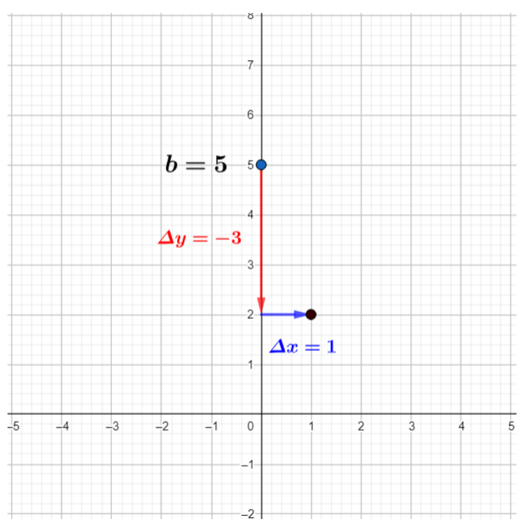
En este ejemplo, la pendiente tiene un valor entero y negativo, recuerda que los valores enteros pueden expresarse como razones, con denominador uno, y el signo negativo se asigna solo a uno de los dos términos, al numerador o al denominador.

$$m = -3$$

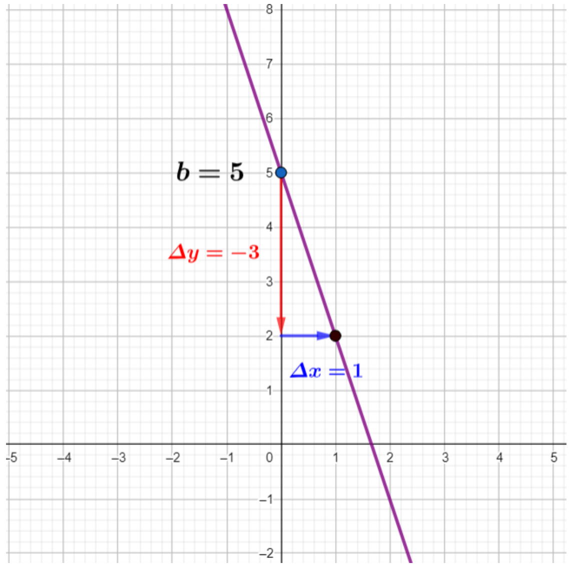
Se transforma en:

$$m = \frac{-3}{1}$$

Lo anterior significa que, a partir del punto identificado, el desplazamiento vertical será de tres hacia abajo, por ser negativo. Después se desplazará uno hacia la derecha por ser positivo. Como se muestra a continuación:



Encontrándose así un segundo punto de la recta, que al unirse con el primero permite definir la trayectoria de la función analizada.



Las características principales de una función lineal son:

- Su gráfica es una recta
- Crecimiento proporcional
- El dominio y el rango de las funciones lineales están definidos para todo el conjunto de los números reales.
- Es continua en todo su dominio

En el siguiente ejemplo podrás ver cómo puedes aplicar una función lineal en la solución de un problema.

Un capturista recibe $36 diarios y por cada página capturada tiene una comisión de $3. [3]

a) Estable la regla de correspondencia
b) Si el lunes entregó 15 páginas, el martes 18, el miércoles 20, el jueves 22 y el viernes 23, ¿Cuánto ganó cada día?
c) Relaciona el número de páginas con el sueldo por día y elabora una gráfica.

Solución

a) La regla de correspondencia está dada por:

$$Sueldo\ fijo\ por\ día\ (F)\ =\ \$\,36.00$$
$$Comisión\ por\ cada\ página\ (C)\ =\ \$\,3.00$$
$$Número\ de\ páginas\ por\ día\ =\ p$$
$$Sueldo\ total\ por\ día\ =\ T$$
$$Sueldo\ total\ por\ día\ =\ sueldo\ fijo\ por\ día\ +\ (comisión\ por\ página)(número\ de\ páginas).$$

[3] Tomado de Colegio de Bachilleres. 2001. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II, pag. 8. https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_II.pdf

La regla de correspondencia es:

$$T = F + Cp$$

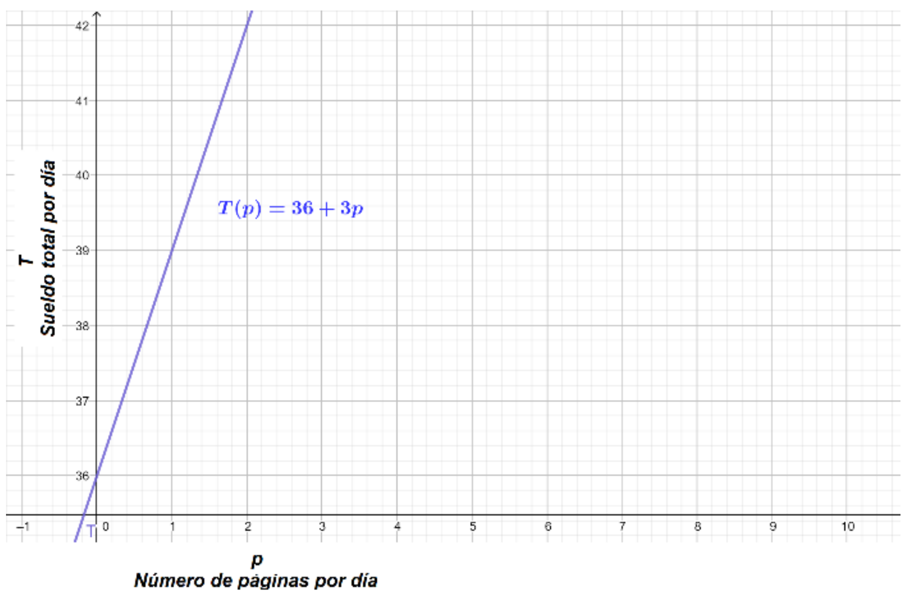
Pero no olvidemos que F y C son constantes, y al sustituirlas queda:

$$T = 36 + 3p$$

b) La siguiente tabla muestra el sueldo total por día en función del número de páginas capturadas.

Número de páginas por día p	Regla de correspondencia $T = 36 + 3p$	Sueldo total por día T
15	$36 + 3(15)$	81
18	$36 + 3(18)$	90
20	$36 + 3(20)$	96
22	$36 + 3(22)$	102
23	$36 + 3(23)$	105

c) Gráfica de la función

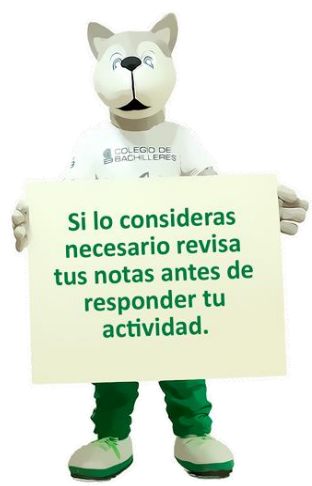


- https://youtu.be/PnATAsxu_oo
- https://youtu.be/jdv8X1YzclM

Actividad de aprendizaje 1[4]

Grafica las siguientes funciones polinomiales de primer grado, considerando los datos que se proporcionan

Función	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{b}$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	4
$g(x)$	-2	-1
$h(x)$	$\frac{5}{4}$	1
$i(x)$	5	-3
$j(x)$	$\frac{3}{5}$	-2



[4] Adaptado de Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa, 2019, Guía para el examen de Matemáticas IV

Función cuadrática[5]

En esta sección se analizará la función cuadrática, la cual es un caso particular de la función polinomial, y cuya gráfica es una parábola. La expresión algebraica para estas funciones es:

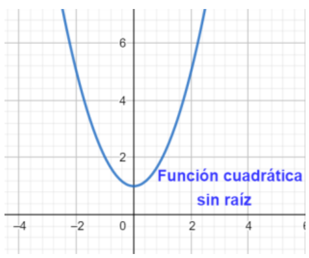
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

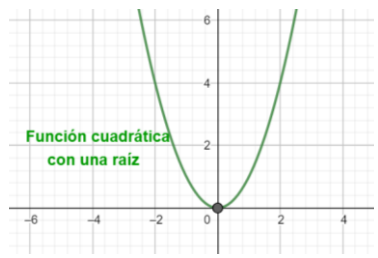
Siendo $a \neq 0$

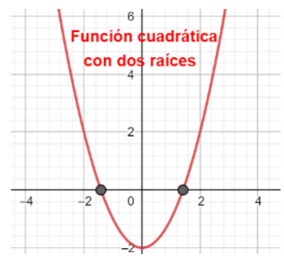
El dominio de las funciones cuadráticas son el conjunto de los números reales, su rango depende de la orientación que tenga la función y de la ubicación de su vértice.

Al ubicar una función cuadrática en un sistema de ejes coordenados, se puede observar:

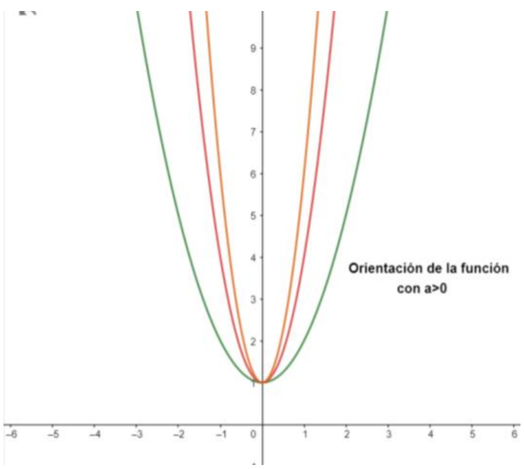
- Existe dos cortes con el eje de las abscisas x, denominadas raíces, cuyas coordenadas son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Algunas funciones solo tienen una raíz o ninguna.

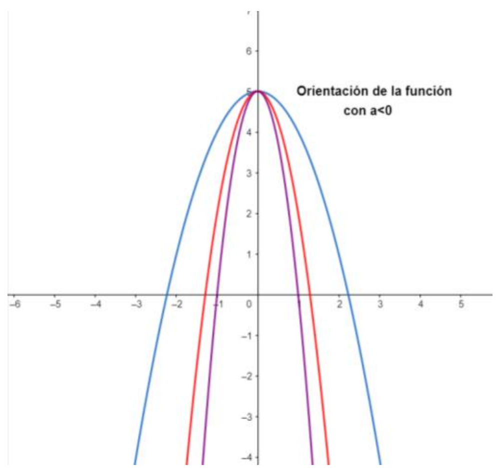






- Considerando el valor de a, la parábola puede cambiar de orientación





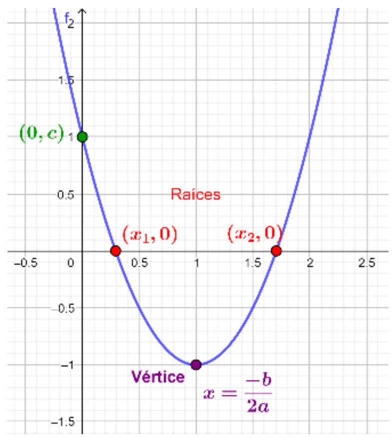
- Un corte con el eje de las ordenadas, con coordenadas $(0, c)$.
- Dependiendo de la orientación que tenga la parábola, el vértice de la función será un punto máximo o mínimo. Para encontrar el valor de la abscisa del vértice, se utiliza la expresión: $h = -\frac{b}{2a}$

[5] Adaptado de Colegio de Bachilleres. 2001. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II, p. 39.

- Para determinar la ordenada del vértice k, se sustituye el valor la abscisa del vértice x_v, en la expresión de la función.

- El rango de una función cuadrática se determina a partir de las siguientes condiciones:

Si $a > 0$	Si $a < 0$
Rango: (k, ∞)	Rango: $(-\infty, k)$



Existen diversas maneras de determinar el valor de las abscisas de las raíces de una función cuadrática, pero uno de los más comunes es el uso de la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ se extraen de la expresión de la función cuadrática: $f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$

Recuerda que $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente del término cuadrático, $\boldsymbol{b}$ el coeficiente del término lineal y $\boldsymbol{c}$ es el valor del término independiente, en caso de que no exista termino lineal o término independiente, el valor de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ serían cero respectivamente.

Ejemplo[6]

El defensa de un equipo de fútbol soccer realiza un saque de meta, de manera que la trayectoria que describe el balón está representada por la función:

$$f\ (t) =\ 10t - 5t^2$$

Donde:
f: la altura que alcanza el balón en su trayectoria
t: es el tiempo del recorrido del balón

a) Determina cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente.
b) Elabora la gráfica de la función
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

[6] Ibidem

Solución

a) Al analizar la situación y la función planteada en el problema, se puede ver que la altura es la que depende del tiempo, por lo que:
Variable independiente: t, tiempo en segundos
Variable dependiente: f, altura en metros

b) Elabora la gráfica de la función
Para poder determinar la gráfica de la función, es útil determinar las raíces y la ubicación del vértice.

- Raíces de la función

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la función $f\ (t) = \ 10t - 5t^2$ se analiza:

$a = -5$
$b = 10$
$c = 0$, porque la expresión de la función no tiene término independiente

Entonces:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-5)(0)}}{2(-5)}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 0}}{-10}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100}}{-10}$$
$$x = \frac{-10 \pm 10}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 10}{-10} \qquad x_2 = \frac{-10 - 10}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-0}{-10} \qquad x_2 = \frac{-20}{-10}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

Lo cual se puede interpretar como que en el segundo 0 y en el segundo 2, el balón se encuentra a $0\ m$ de altura, es decir, cuando inicia y termina su trayectoria.

- Vértice de la función

$$h = -\frac{b}{2a}$$

Recuerda que los valores de a y b se extraen de la expresión de la función cuadrática que se analiza. En este caso: $\boldsymbol{f(t) = 10t - 5t^2}$

$$a = -5$$
$$b = 10$$

Sustituyendo en la expresión:

$$x = -\frac{10}{2(-5)}$$
$$x = -\frac{10}{-10}$$
$$x = 1$$

Ahora, este valor se sustituye en la función para obtener la ordenada del vértice.

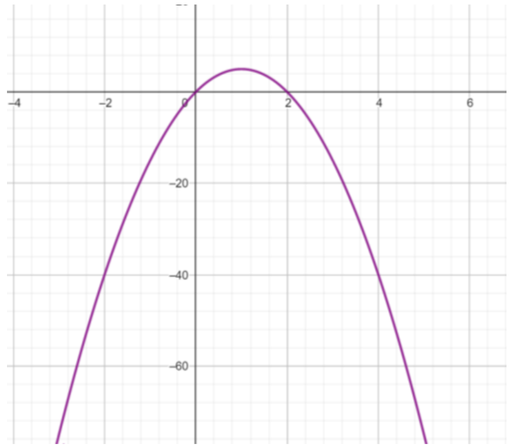
$$f(t) = 10t - 5t^2$$
$$f(1) = 10(1) - 5(1)^2$$
$$f(1) = 10 - 5$$
$$f(1) = 5$$

Por lo anterior, las coordenadas del vértice son (1, 5)

Para que en la gráfica se logren ver el comportamiento de la función alrededor del vértice y las raíces, estos valores se toman en cuenta.

Dominio $\boldsymbol{t}$	**Regla de correspondencia** $\boldsymbol{10t - 5t^2}$	**Rango** $\boldsymbol{f}$
-2	$10(-2) - 5(-2)^2$	-40
-1	$10(-1) - 5(-1)^2$	-15
0	$10(0) - 5(0)^2$	0
1	$10(1) - 5(1)^2$	5
2	$10(2) - 5(2)^2$	0
3	$10(3) - 5(3)^2$	-15

Por lo que la gráfica queda:



c) La altura máxima se calcula a partir de la abscisa del vértice.
Como las coordenadas del vértice son (1, 5), estos datos significan que, el alcanza su altura máxima que son 5 m, cuando ha transcurrido un segundo de su trayectoria.

NOTA: Las coordenadas del vértice y de las raíces que se determinaron analíticamente, es posible que los contrastes con la gráfica realizada.

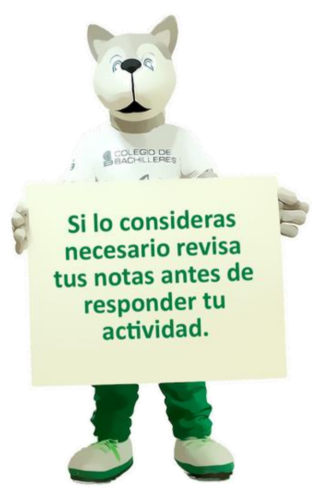
CONOCE +

- https://youtu.be/_bP6NowsO-Y
- https://youtu.be/YlhOfpREfHE
- https://youtu.be/6JQw45YO3Fs

Actividad de aprendizaje 2

Grafica las siguientes funciones

1. $f(x) = 3x^2 - 2x - 6$
2. $g(x) = -5x^2 + 27x + 31$
3. $h(x) = x^2 + 3$
4. $i(x) = -5x^2 - 15$
5. $j(x) = x^2 + 2x + 1$



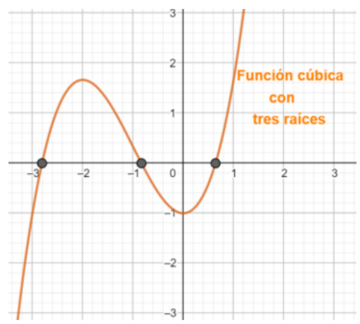
Función cúbica

Una función cúbica o de tercer grado, es una función polinómica que tiene como mayor exponente en su expresión el 3.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Con $a \neq 0$

Las funciones cúbicas pueden tener una, dos o tres intersecciones con el eje de las abscisas, las cuales se les conoce como raíces.



El dominio y el rango de las funciones cúbicas es el conjunto de los números reales.

Las funciones cúbicas tienen un comportamiento gráfico que depende del valor del coeficiente del término cúbico.

Puedes observar la forma que se genera cuando el valor de a cambia de signo, lo cual es muy útil cuando se realiza la gráfica, ya que sirve de guía para iniciar.

Además, las funciones polinomiales tienen características gráficas bien definidas, que se resumen en la siguiente tabla.

Grado de la función	Número de veces que la función…		
	Asciende	Desciende	Total
Primer	0	1	1
	1	0	1
Segundo	1	1	2
Tercer	1	2	3
	2	1	3

Nota: En las funciones de primer y de tercer grado pueden tener uno u otro de los comportamientos presentados en la tabla.

Para conocer el comportamiento gráfico de una función cúbica, se recomiendan los siguientes pasos:

1. Establecer el comportamiento de la función.
2. Determinar la intersección con el eje x (raíces o ceros de la función, $f(x) = 0$).
3. Tabulación de la función, para saber si los puntos están arriba o abajo del eje x.
4. Realizar la gráfica.

Ejemplo:
Obtener la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 9x$

Solución:

1. Establecer el comportamiento de la función
   Al analizar la función se puede apreciar que el coeficiente a del término de tercer grado es 1, es decir $a > 0$, por lo que se puede concluir que la gráfica tendrá aproximadamente la siguiente forma:

2. Determinar la intersección con el eje x (raíces o ceros de la función, $f(x) = 0$).

   Para poder encontrar los ceros de la función, ésta se igualará a cero:
   $$x^3 + 9x = 0$$
   Se factorizará por medio del factor común, ya que ambos términos se están multiplicando por x.

$$x(x^2 + 9) = 0$$

Hay dos maneras para que esta multiplicación tenga como resultado cero, que el factor $x = 0$ o que el factor $(x^2 + 9) = 0$ y esta última condición se cumple cuando:

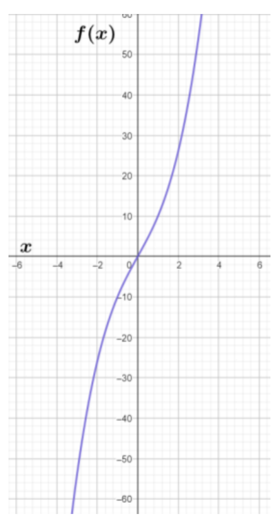
$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9}$$

Como las raíces cuadradas de los números negativos, están fuera de los números reales, la única raíz que tiene esta función es $x = 0$. Es decir, la función cruzará el eje de las abscisas en el punto $(0, 0)$

3. Tabulación de la función, para saber si los puntos están arriba o abajo del eje x. Se sugiere que en la tabulación se consideren valores cercanos a los ceros de la función, en este caso, cercanos del cero.

x	$f(x) = x^3 + 9x$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)$	-54	(-3, 54)
-2	$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)$	-26	(-2, -26)
-1	$f(-1) = (-1)^3 + 9(-1)$	-10	(-1, -10)
1	$f(1) = (1)^3 + 9(1)$	10	(1, 10)
2	$f(2) = (2)^3 + 9(2)$	26	(2, 26)
3	$f(3) = (3)^3 + 9(3)$	54	(3, 54)

4. Grafica la función

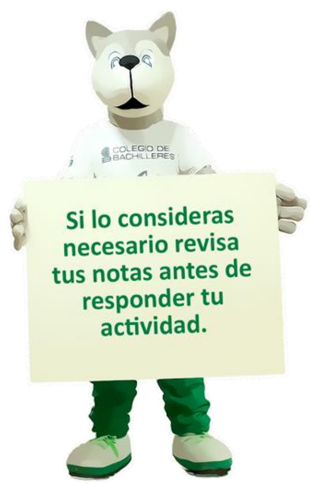


Como se puede apreciar en la gráfica, la orientación de la curva coincide con la predicción que se hizo con base en el coeficiente del término de tercer grado, los ceros de la función coinciden con lo calculado. Estos primeros pasos ayudan a que la tabulación no necesite tantos puntos para poder graficar la función.

Actividad de aprendizaje 3

Realiza la gráfica de las siguientes funciones. Considera los pasos que se te sugieren.

1. $f(x) = -2x^3 - 10x^2 - 12x$
2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$



Operaciones con funciones

Al igual que con los números, es posible combinar las funciones a través de operaciones como la suma, multiplicación y división. Dadas las funciones f y g, definidas para un mismo dominio:

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente: $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, donde\ g(x) \neq 0$

Lo anterior se ilustra con algunos ejemplos:

Sean: $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ y $g(x) = x^2 + 1$

Determina:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  $(f+g)(x) = (3x^2 + 2x - 4) + (x^2 + 1)$
  $(f+g)(x) = 4x^2 + 2x - 3$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
  $(f-g)(x) = (3x^2 + 2x - 4) - (x^2 + 1)$
  $(f-g)(x) = 2x^2 + 2x - 5$

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
  $(f \cdot g)(x) = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1)$
  $(f \cdot g)(x) = 3x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2\,x - 4x^2 - 4$
  $(f \cdot g)(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2\,x - 4$

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
  $\frac{f}{g}(x) = \frac{3x^2+2x-4}{x^2+1}$, con $x \neq \pm 1$, ya que con estos valores el denominador vale 0.

- https://youtu.be/NCmrXFgbu14
- https://youtu.be/ClVek_KuU2M
- https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato-nme/x5828d8a71717b83a:operaciones-con-funciones/x5828d8a71717b83a:operaciones-basicas/a/introduction-to-combining-functions
-

Actividad de aprendizaje 4[7]

Realiza las operaciones que se te solicitan en cada caso.

1. Sean $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = x^2 - 3x + 5$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$

2. Sean $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = x + 5$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

3. Sean $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \frac{6}{x-1}$ con $x \neq 1, con\ este\ valor\ el\ denominador\ vale\ 0$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

4. Sean $f(x) = 8x - 2$ y $g(x) = x + 2$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$

5. Sean $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x - 5$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

[7] Ibidem

Reglas de derivación[8]

Las derivadas de las funciones se pueden determinar de su definición como límite de una función. Este procedimiento requiere de la aplicación de un amplio dominio de reglas y procedimientos algebraicos, lo cual puede resultar en un procedimiento largo y difícil, por lo anterior se darán algunas reglas o teoremas que permitan calcular la derivada de funciones algebraicas sin usar directamente los límites. Dichas reglas son las siguientes.

1. Reglas de la constante. La derivada de una constante es cero.

$$\frac{d}{dx}C = 0$$

2. La derivada de la función identidad es uno

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

3. La derivada del producto de una constante por una función (producto por un escalar)

$$\frac{d}{dx}Cu = C\frac{d}{dx}u$$

4. Regla de la suma o diferencia de funciones

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v$$

5. Regla de las potencias simples

$$\frac{d}{dx}x^n = n\frac{d}{dx}x^{n-1}$$

6. Regla de las potencias generales

$$\frac{d}{dx}u^n = n\frac{d}{dx}u^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

7. Regla del producto de funciones

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

   La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

8. Regla del cociente de dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$$

[8] Adaptado de Colegio de Bachilleres, 2002. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Cálculo Diferencial e Integral I, p.p. 39-41.

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido todo por el denominador al cuadrado.

9. Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{du}v\frac{d}{dx}u$$

Si $y = f\,(u)$ es una función diferenciable en u y $u = g(x)$ es una función diferenciable en x, entonces: $y = f\,[\,g(x)]$ es una función diferenciable en x.

Recuerda que las notaciones para la primera derivada de una función son:

$$f'(x), y', D_x f, \frac{d}{dx}f(x)$$

Reglas de derivación para funciones trascendentes
Recuerda que las funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica.

a) Reglas de derivación para las funciones trigonométricas
   1. Función seno $\frac{d}{dx}sen\,u = \cos u\,\frac{du}{dx}$
   2. Función coseno $\frac{d}{dx}\cos u = -\mathrm{sen}\,u\,\frac{du}{dx}$
   3. Función tangente $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\,\frac{du}{dx}$
   4. Función cotangente $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$
   5. Función secante $\frac{d}{dx}\sec u = \sec\ u \tan u\frac{du}{dx}$
   6. Función cosecante $\frac{d}{dx}\csc u = \csc u \cot u\,\frac{du}{dx}$
b) Reglas para derivar función exponencial e^x y e^u
   1. Toda derivada e^x es igual a e^x, esto es:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

   2. Si u es una función derivable en x, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

3. Particularmente, si k es una constante, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

c) Reglas para derivar funciones logarítmicas naturales
   1. Derivada de la función logaritmo natural

$$\frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$$

   2. Si u es una función diferenciable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}lnu = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos
Determina la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = 5$, como la función es una constante (regla 1).

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5 = 0$$

2. $f(x) = x$, f(x) es la función identidad (regla 2).

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

3. $f(x) = 3x$, la función consiste en una constante que multiplica a una variable (regla 3).

$$\frac{d}{dx}3x = 3\frac{d}{dx}x$$

Después de aplicar la regla de una constante por una variable, se puede observar que queda pendiente la derivada resaltada en rojo, y corresponde a la derivada de la función identidad (regla 2).

$$\frac{d}{dx}3x = 3\frac{d}{dx}x$$

$$\frac{d}{dx}3x = 3(1)$$

$$\frac{d}{dx}3x = 3$$

Una vez que la expresión esté derivada completamente, se ha terminado la derivada.

4. $f(x) = \frac{7}{2}x + 5$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right)$$

Como la función es a su vez una suma de funciones (regla 4), la derivada se separa en tantas derivadas como los sumandos que integran la suma.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{d}{dx}\frac{7}{2}x + \frac{d}{dx}5$$

La primera derivada que resulta es la derivada de una constante por una variable (regla 3), que a su vez tiene que simplificarse, como la multiplicación de la constante ($7/2$ en este ejemplo) por la variable. La segunda, es la derivada de una constante (regla 1), a la cual se le puede aplicar la regla de manera directa.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{7}{2}\frac{d}{dx}x + 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{7}{2}x$$

5. $f(x) = x^4$, dado que la función es la potencia de una variable, se aplica la regla 5.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4$$

Regla 5, donde $n = 4$

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

6. $f(x) = \frac{4x-1}{-4x-1}$, debido a la naturaleza de la función, inicialmente se aplicará la regla 8, donde $u = 4x - 1$ y $v = -4x - 1$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)\frac{d}{dx}(4x-1) - (4x-1)\frac{d}{dx}(-4x-1)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)\left(\frac{d}{dx}4x - \frac{d}{dx}1\right) - (4x-1)\left(\frac{d}{dx}(-4x) - \frac{d}{dx}1\right)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{(-4x-1)\left(4\frac{d}{dx}x-0\right)-(4x-1)\left(-4\frac{d}{dx}x-0\right)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{(-4x-1)(4(1)-0)-(4x-1)(-4(1)-0)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{(-4x-1)(4)-(4x-1)(-4)}{(-4x-1)^2}$$

Hasta el paso anterior, se terminó el proceso de derivación, a continuación, se simplificará el resultado.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{(-16x-4)-(-16x+4)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{-16x-4+16x-4}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right)=\frac{-4}{(-4x-1)^2}$$

7. $f(x)=(4x+5)^3$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=3(4x+5)^2\frac{d}{dx}(4x+5)$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=3(4x+5)^2\left[\frac{d}{dx}4x+\frac{d}{dx}5\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=3(4x+5)^2\left[\frac{d}{dx}4x+0\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=3(4x+5)^2\left[4\frac{d}{dx}x+0\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=3(4x+5)^2(4)$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3=12(4x+5)^2$$

CONOCE +

- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-5/v/power-rule
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-6a/v/derivative-properties-and-polynomial-derivatives
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-6b/v/differentiating-polynomials-example
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-7/v/derivatives-of-sinx-and-cosx
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-8/v/applying-the-product-rule-for-derivatives
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-9/v/quotient-rule

Derivadas de orden superior o sucesivas
El resultado de la derivada de una función es otra función, por lo tanto, es susceptible a ser derivada, al resultado se le llama segunda derivada. Este resultado puede ser derivado, es decir, obtener derivadas sucesivas.

Para obtener la segunda derivada, se utilizan las mismas reglas y procedimientos expuestos anteriormente. Las notaciones para la segunda derivada de una función son:

$$f''(x), y'', \frac{d^2}{dx^2}y,\ D_x^2 f, \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Ejemplos:
Obtén la segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 4$
   Aplicando la regla 4,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(5x^4 - 3x^2 + 2x - 4)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5x^4 - \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}4$$

Aplicando la regla 3, 1

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5\frac{d}{dx}x^4 - 3\frac{d}{dx}x^2 + 2\frac{d}{dx}x - 0$$

Aplicando la regla 5 y la regla 2

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5(4x^{4-1}) - 3(2x^{2-1}) + 2(1) - 0$$

Simplificando la expresión:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 20x^3 - 6x + 2$$

Esta es la expresión de la primera derivada, para determinar la segunda derivada se derivará esta expresión.

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}(20x^3 - 6x + 2)$$

Aplicando la regla 4:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}20x^3 - \frac{d}{dx}6x + \frac{d}{dx}2$$

Aplicando la regla 3 y 1

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 20\frac{d}{dx}x^3 - 6\frac{d}{dx}x + 0$$

Aplicando la regla 5 y 2

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 20(3x^{2-1}) - 6(1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 60x - 6$$

CONOCE +

- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-2-new/ab-3-6/v/second-derivatives
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-2-new/ab-3-6/e/second-derivatives

Actividad de aprendizaje 5
Determina la derivación de las funciones por medio de la regla de derivación.

1. $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$

2. $g(x) = 1 - 2x - x^2$

3. $f(x) = \frac{3}{x^5}$

4. $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$

5. $f(x) = \frac{2x^3+4}{x^2+1}$

6. $g(x) = x^2(senx)$

7. $f(x) = \cos(4x)$

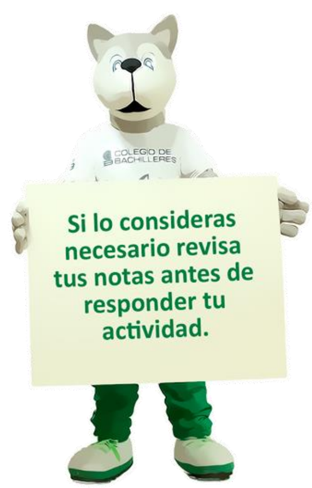
8. $h(x) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$

9. $g(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$

10. $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{-1}{2}}$

11. $g(x) = (2x + 1)^3$

12. $f(x) = e^{x^2}$



Actividad de aprendizaje 6

Calcula la derivada sucesiva que se te solicita en cada ejercicio

a) Determina la quinta derivada para la siguiente función

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

b) Determina la cuarta derivada para la siguiente función

$$g(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$$

c) Determina la tercera derivada para la siguiente función

$g(x) = (4x^2 + 3)^2$

d) Determina la segunda derivada para la siguiente función
$f(x) = 7x - 5$

AUTOEVALUACIÓN

En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte 2.

Aspecto para considerar	Si	No	Cómo puedo realizarlo mejor
• Organicé el tiempo de estudio para la realización de esta guía.			
• Realicé una lectura activa de los ejemplos de la guía.			
• Procuré eliminar las distracciones para realizar las actividades.			
• Realicé anotaciones a lo largo del desarrollo de la guía.			
• Consulté las fuentes sugeridas para los temas que representaron mayor dificultad.			
• Desarrollé detalladamente las actividades de aprendizaje sugeridas.			
• En caso necesario, busqué y realicé más ejercicios para reforzar mi aprendizaje.			

FUENTES CONSULTADAS

En esta sección podrás conocer cuáles fueron las lecturas y documentos que se tomaron en cuenta para la realización de este material.

- Becerril, R., Jardón, D., Reyes, J. (2002). *Precálculo.* México: UAM-Iztapalapa.
- Cuéllar Carvajal, J. A. (2006) Matemáticas IV Relaciones y Funciones. México: Mc Graw Hill.
- Fuenlabrada de la Vega, S. (2001) Cálculo Diferencial. 2ª edición. México Mc Graw Hill Interamericana.Méndez H. A. (2006). *Matemáticas IV*. México: Santillana.
- Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Cálculo Diferencial e Integral I. 2002. Colegio de Bachilleres https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_I.pdf
- Guía para el examen de Matemáticas IV. 2019. Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa. https://drive.google.com/file/d/10Usemj2hFtX0eB35BZNHTXi6nnUz3LhX/view
- Jiménez, R. (2008) Cálculo Diferencial. 1ª edición. México, Pearson educación.
- Larson, R., Edwards, R. (2005) Cálculo Diferencial e Integral. 7ª edición. México, Mc Graw Hill Interamericana.
- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Cengage Learning. Méndez H. A. (2006). Matemáticas IV. México: Santillana.

LA DERIVADA

Aprendizajes esperados:

Contenidos específicos	Aprendizajes esperados.
• Determinación de máximos o mínimos de una función mediante criterios de la derivada. • Localización de puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada.	• Localiza los máximos y mínimos y las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.

PROPÓSITO

Al finalizar este corte podrás analizar y caracterizar las funciones algebraicas y trascendentes a través de sus puntos críticos, utilizando el proceso.

RECOMENDACIÓN

Te sugerimos, revises los aprendizajes esperados antes de iniciar con el estudio del corte, realiza las anotaciones que sean necesarias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para asegurar una mejor comprensión de los conocimientos que se revisarán en este corte, es preciso contar con los siguientes conocimientos previos:

- Leyes de los exponentes
- Elementos de términos algebraicos: coeficiente, base y exponente.
- Multiplicación de polinomios
- Simplificación de expresiones algebraicas
- Reglas de derivación

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Con la finalidad de conocer tus habilidades, el dominio de los conocimientos previos y que reconozcas fácilmente tus dudas, resuelve los ejercicios que conforman la Evaluación Diagnóstica.

1. Determina el resultado de los siguientes ejercicios aplicando “teoría o ley de los exponentes”

   a) $\frac{x^5}{x^5} =$

   Expresa con signo radical:

   b) $2a^{\frac{4}{5}}\, b^{\frac{5}{2}} =$

   Expresa con exponente fraccionario:

   c) $\sqrt{ab^3c^5} =$

   Divide:

   d) $\frac{-3x^{2a+3}y^{3a-2}}{-5x^{a-4}y^{a-1}} =$

   e) $\frac{\frac{2}{3}a^2b^3c}{-\frac{5}{6}a^2bc} =$

Determina el valor:

f) $(a^{-2})^3 =$

g) $\left(2a^{-1}b^{\frac{1}{3}}\right)^3 =$

2. Completa la siguiente tabla con la información solicitada en cada columna.

Término	Signo	Coeficiente	Variable	Exponente
x				
$-a^{\frac{2}{3}}$				
$\frac{7}{5}a^4b^3c^2$				
$2a^2b$				

3. Desarrolla y simplifica en su mínima expresión los siguientes ejercicios.

a) $\left(x^3 - 2x^2 + 3x - 1\right)(2x + 3) =$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y\right) =$

c) $3(x+y)^2 - 4(x-y)^2 + 3x^2 - 3y^2 =$

CONOCE +

- https://youtu.be/RLFRKSy1b3s
- https://youtu.be/Yng9FbUK2MY
- https://youtu.be/Y7rvipk5NO4
- https://youtu.be/f2Gzfua7z9s
- https://youtu.be/BxrJmKdPHRs
- https://youtu.be/p_-MYV2deQ4

A continuación, encontrarás una serie de contenidos que te servirán de apoyo para el logro del propósito del corte 3.

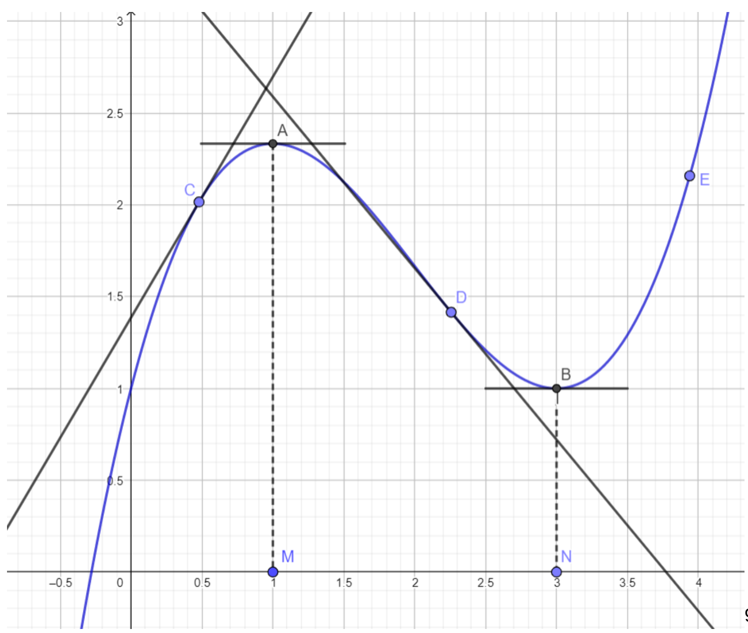
Determinación de máximos o mínimos de una función mediante criterios de la derivada.

Una aplicación de la derivada es la determinación de los puntos máximos y mínimos de una función; se dice que el valor de una función es un *máximo si es mayor* que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente; y el valor de una función es un *mínimo si es menor* que uno cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.

Considere la siguiente gráfica.

Sea una función $y = f(x)$, mostrada en la gráfica, los valores a la derecha de B son mayores que el máximo MA, y los valores a la izquierda de A que son menores que el mínimo NB.

Siendo el punto A, conocido como máximo relativo; y el punto B, llamado también mínimo relativo.

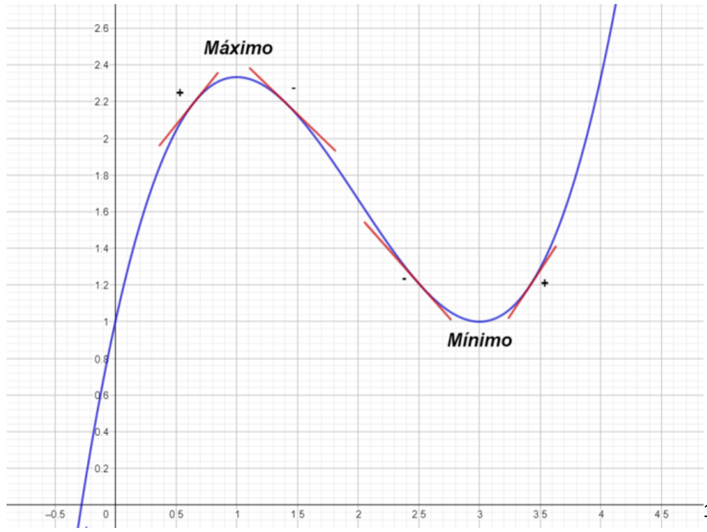


[9]

Dado lo anterior, se deduce, que en un punto en el cual la derivada se anule y antes sea positiva y después del punto sea negativa, se dice que la función tiene un máximo relativo, $f'(x_0) = 0$ y en ese punto, la función pasa de creciente a decreciente. En $x = a$, la función tiene un máximo relativo.

[9] Granville, William Anthony. (2017) Cálculo Diferencial e Integral. México, Limusa. Gráfica realizada en Geogebra

Y en un punto en el cual la derivada se anule y antes sea negativa y después del punto sea positiva, se dice que la función tiene un mínimo relativo, $f'(x_0) = 0$ y en ese punto, la función pasa de creciente a decreciente. En $x = b$, la función tiene un mínimo relativo.



[10]

Dado lo anterior, se pueden deducir las siguientes condiciones generales para determinar los máximos y mínimos:

$f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ cambia de signo pasando de + a –
$f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ cambia de signo pasando de - a +

Lo anterior se puede resumir en los siguientes puntos:
1.- Mientras la pendiente de la tangente, es decir la derivada de una función sea positiva, la función, el valor de “$\boldsymbol{y}$” *crece*
2.- Mientras dicho valor sea negativo, la función, *decrece*
3.- Las dos proposiciones anteriores no pueden ser negadas, es decir, afirmar lo contrario de lo que expresan.

Ahora bien, para determinar estos máximos y mínimos de una función, se aplica el criterio de la primera.

Criterio de la primera derivada:
Ejemplo 1:
Determina los máximos o mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Se deriva la función	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ $f(x)' = 3x^2 + 6x$
Para encontrar los valores críticos de “x”, la derivada se iguala a cero, se factoriza y se determina las raíces de la ecuación.	
Se factoriza la ecuación	$3x^2 + 6x = 0$

[10] Gráfica representativa realizada en Geogebra

	$3x(x+2)=0$	
Se determinan los valores críticos (raíces de la ecuación)	$3x=0$ $x=\frac{0}{3}$ $x=0$	$x+2=0$ $x=-2$
Se obtienen los valores que corresponden a un máximo o a un mínimo de los puntos críticos, considerando un valor menor y mayor a estos puntos críticos.		

Para $x=0$	
Para un valor menor a 0	Para un valor mayor a 0
Si $x=-0.5$ $f(-0.5)=3(-0.5)^2+6(-0.5)$ $f(-0.5)=3(0.25)-3$ $f(-0.5)=0.75-3$ $f(-0.5)=-2.25$ (negativo)	Si $x=0.5$ $f(0.5)=3(0.5)^2+6(0.5)$ $f(0.5)=3(0.25)+3$ $f(0.5)=0.75+3$ $f(0.5)=3.75$ (positivo)

Los signos de los resultados -2.25 y 3.75 indican que la función pasa de ser *decreciente* a *decreciente*; por lo tanto, para $x=0$ la función tiene un *mínimo*.

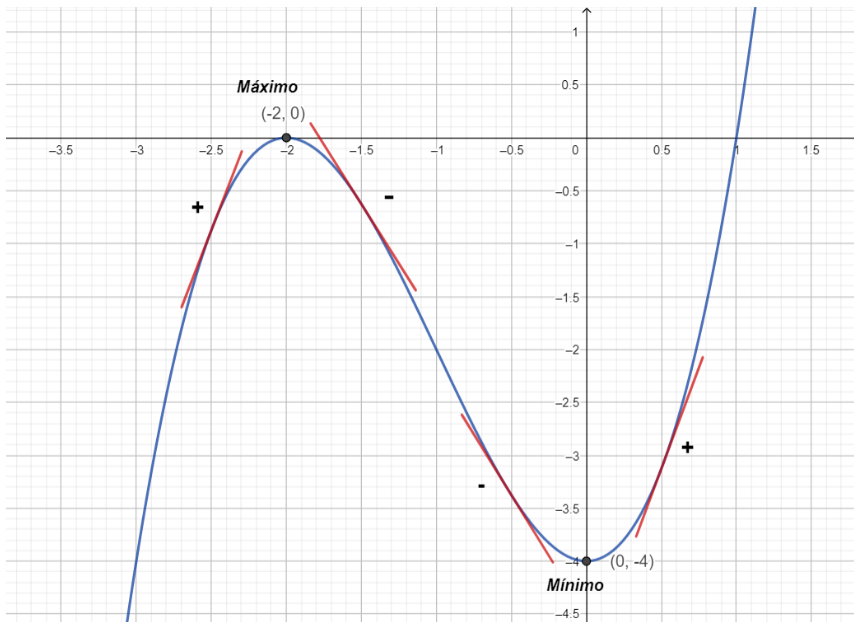
Para $x=-2$	
Para un valor menor a -2	Para un valor mayor a -2
Si $x=-2.5$ $f(-2.5)=3(-2.5)^2+6(-2.5)$ $f(-2.5)=3(6.25)-15$ $f(-2.5)=18.75-15$ $f(-2.5)=3.75$ (positivo)	Si $x=-1.5$ $f(-1.5)=3(-1.5)^2+6(-1.5)$ $f(-1.5)=3(2.25)-9$ $f(-1.5)=6.75-9$ $f(-1.5)=-2.25$ (negativo)

Los signos de los resultados 3.75 y -2.25 indican que la función pasa de ser *creciente* a *decreciente*; por lo tanto, para $x=-2$ la función tiene un *máximo*.

Se evalúa la función para los puntos críticos y para determinar las ordenadas de los puntos máximos y mínimos

Máximo para $x=-2$	Mínimo para $x=0$
$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$ $f(-2)=-8+3(4)-4$ $f(-2)=-8+12-4$ $f(-2)=0$ El punto *máximo* se encuentra en: (-2, 0)	$f(0)=(0)^3+3(0)^2-4$ $f(0)=-4$ El punto *mínimo* se encuentra en: (0, -4)

Finalmente se realiza la comprobación al graficar la función:



CONOCE +

- https://youtu.be/caFQQn80-6A
- https://youtu.be/-bI0ovvyu2I
- https://youtu.be/9-6Scy1ECDw
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-diff-analytical-applications-new/ab-5-4/a/relative-minima-and-maxima-review

Actividad de aprendizaje 1

Determina mediante el criterio de la primera derivada, los puntos máximos o mínimos, realiza la comprobación en la gráfica correspondiente de las siguientes funciones.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

2) $f(x) = -3x^2 + 5x - 4$

3) $f(x) = x^3 - 3x$

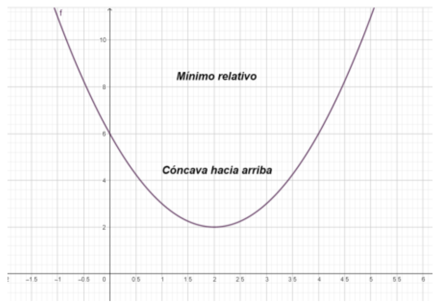
4) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

Localización de puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada.

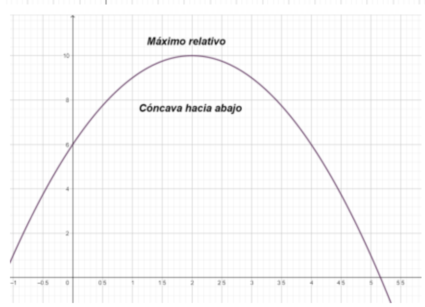
Una vez establecido el criterio de la primera derivada, es importante señalar que el criterio de la segunda derivada permite establecer los puntos de inflexión en una función, lo cual se reconoce como el punto en donde cambia el sentido de la curvatura, como se señaló en el tema anterior, una función presenta máximos y mínimos, por lo tanto, el punto de inflexión se reconoce como el punto en que cambia la curvatura.

Para el desarrollo de este tema, se debe tener presente, lo siguiente:
$f´(x)$ Primera derivada
$f´´(x)$ Segunda derivada

Para máximos y mínimos se presentan dos situaciones:



1) Si $f´´(a)$, es *positiva* $(f´´(x_0) > 0)$, la concavidad será hacia arriba, por lo tanto, se tendrá un *mínimo*.



2) Si $f´´(a)$, es *negativa* $(f´´(x_0) < 0)$, la concavidad será hacia abajo, por lo tanto, se tendrá un *máximo*.

Para determinar los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, así como los puntos de inflexión, utilizaremos el criterio de la segunda derivada.

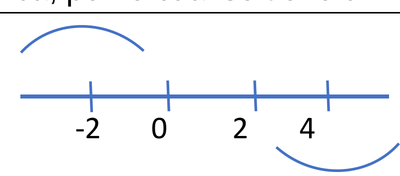
Criterio de la segunda derivada:
Ejemplo 1:
Determina los puntos de inflexión, los máximos y mínimos, además de realizar la gráfica de la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$

Para determinar el punto de inflexión, se obtiene la primera y segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación	
Determinando el valor “$\boldsymbol{x}$” del punto de inflexión	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$ $f´(x) = 3x^2 - 6x - 24$ $f´´(x) = 6x - 6$ $6x - 6 = 0$ $6x = 6$

	$x = \frac{6}{6}$ $x = 1$
Se evalúa la función para el punto crítico encontrado	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$ $f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 24(1) - 10$ $f(1) = 1 - 3 - 24 - 10$ $f(1) = 1 - 37$ $f(1) = -36$
Coordenadas del *punto de inflexión*	(1, -36)

<table>
<tr><td colspan="3">Para encontrar los valores críticos de “x”, se iguala a cero la primera derivada, se factoriza y se determina las raíces de la ecuación.</td></tr>
<tr><td>Se iguala a cero y se resuelve la ecuación</td><td colspan="2">$3x^2 - 6x - 24 = 0$</td></tr>
<tr><td>Simplificando</td><td colspan="2">$\frac{3}{3}x^2 - \frac{6}{3}x - \frac{24}{3} = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Determinando los valores críticos (raíces de la ecuación)</td><td colspan="2">$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$</td></tr>
<tr><td>$x - 4 = 0$
$x = 4$</td><td>$x + 2 = 0$
$x = -2$</td></tr>
</table>

Se evalúa la segunda derivada con los valores críticos obtenidos para determinar la concavidad

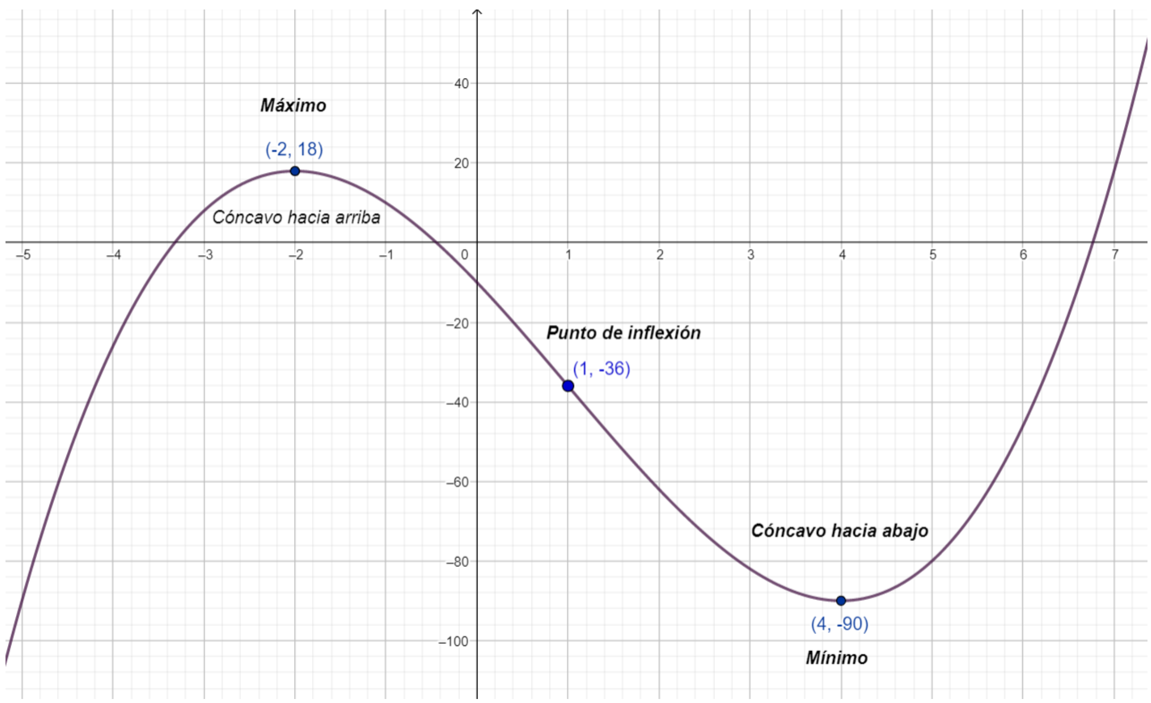
Para $x = -2$	Para $x = 4$
$f''(x) = 6x - 6$ $f''(-2) = 6(-2) - 6$ $f''(-2) = -12 - 6$ $f''(-2) = -18$ Al ser *negativo*, la concavidad es hacia abajo, por lo cual se tiene un *máximo*	$f''(x) = 6x - 6$ $f''(4) = 6(4) - 6$ $f''(4) = 24 - 6$ $f''(4) = 18$ Al ser *positivo*, la concavidad es hacia arriba, por lo cual se tiene un *mínimo*
Al colocar estos resultados en una recta numérica, se tiene:	

Para determinar las coordenadas de los *puntos máximos y mínimos*, se valora la función con los valores críticos encontrados.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$

Para $x = -2$	Para $x = 4$
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$ $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 10$ $f(-2) = -8 - 3(4) + 48 - 10$ $f(-2) = -8 - 12 + 48 - 10$ $f(-2) = -30 + 48$ $f(-2) = 18$	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$ $f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 10$ $f(4) = 64 - 3(16) - 96 - 10$ $f(4) = 64 - 48 - 96 - 10$ $f(-2) = 64 - 154$ $f(-2) = -90$
Máximo (-2, 18)	*Mínimo* (4, -90)

Finalmente, para comprobar los resultados, se gráfica la función.



- https://youtu.be/-HeYNHFqIIM
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-diff-analytical-applications-new/ab-5-7/e/second-derivative-test

Actividad de aprendizaje 2

Aplica el criterio de la segunda derivada, para determinar de las siguientes funciones, los puntos de inflexión, las coordenadas de los puntos máximos y/o mínimos, e indique en la gráfica estos puntos.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

4) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

Localizando máximos y/o mínimos y puntos de inflexión de una función trigonométrica.
Para determinar los puntos máximos, mínimos y de inflexión en funciones trigonométricas, es importante recordar

Ejemplo:
Determina los puntos de inflexión, máximos y mínimos de la siguiente función trigonométrica $f(x) = 5\ Cos\ x$, en los intervalos $[0, 3\pi]$

Fórmulas para derivar:

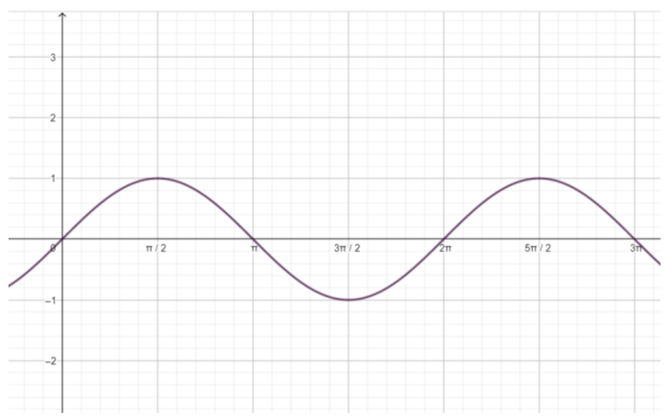
$$\frac{d}{dx}\ Cos\ u = -Sen\ u\ \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ Sen\ u = Cos\ u\ \frac{du}{dx}$$

Se obtiene la primera derivada
$f(x) = 5\ Cos\ x$
$f'(x) = 5 - Sen\ x\ (1)$
$f'(x) = -5\ Sen\ x$

Se iguala a cero para determinar los puntos críticos:
$-5\ Sen\ x = 0$
$Sen\ x = \frac{0}{-5}$
$Sen\ x = 0$
$x = \sin^{-1} 0$

Hay que recordar que las funciones trigonométricas son periódicas, es decir que son repetitivas cada determinados valores, y en el intervalo de este ejemplo, sólo se consideran los valores de 0 a 3π, por lo tanto (de acuerdo a la gráfica mostrada), los valores de cuando la función seno es igual a cero son: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$; es decir, que la función seno toma el valor de cero cada π rad.



Se obtiene la segunda derivada para evaluarla con los puntos críticos encontrados:
$f'(x) = -5\ Sen\ x$
$f''(x) = -5\ \text{Cos}\ x(1)$
$f''(x) = -5\ Cos\ x$

$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

Para $x = 0$

$f''(0) = -5\ Cos\ (0)$
$f''(0) = -5\ (1)$
$f''(0) = -5$

Al ser *negativo*, la concavidad es hacia abajo, por lo cual se tiene un *máximo*

Para $x = \pi$

$f''(\pi) = -5\ Cos\ (\pi)$
$f''(\pi) = -5\ (-1)$
$f''(\pi) = 5$

Al ser *positivo*, la concavidad es hacia abajo, por lo cual se tiene un *mínimo*

Para $x = 2\pi$

Para $x = 3\pi$

$f''(2\pi) = -5\ Cos\ (2\pi)$
$f''(2\pi) = -5\ (1)$
$f''(2\pi) = -5$

Al ser *negativo*, la concavidad es hacia abajo, por lo cual se tiene un *máximo*

$f''(3\pi) = -5\ Cos\ (3\pi)$
$f''(3\pi) = -5\ (-1)$
$f''(3\pi) = 5$

Al ser *positivo*, la concavidad es hacia abajo, por lo cual se tiene un *mínimo*

Para determinar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de la función, se evalúa la función con los valores críticos encontrados.

$f(x) = 5\ Cos\ x$
$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

Para $x = 0$

$f''(0) = 5\ Cos\ (0)$
$f''(0) = 5\ (1)$
$f''(0) = 5$

Máximo $(0, 5)$

Para $x = \pi$

$f''(\pi) = 5\ Cos\ (\pi)$
$f''(\pi) = 5\ (-1)$
$f''(\pi) = -5$

Mínimo $(\pi, 5)$

Para $x = 2\pi$

$f''(2\pi) = 5\ Cos\ (2\pi)$
$f''(2\pi) = 5\ (1)$
$f''(2\pi) = 5$

Máximo $(0, 5)$

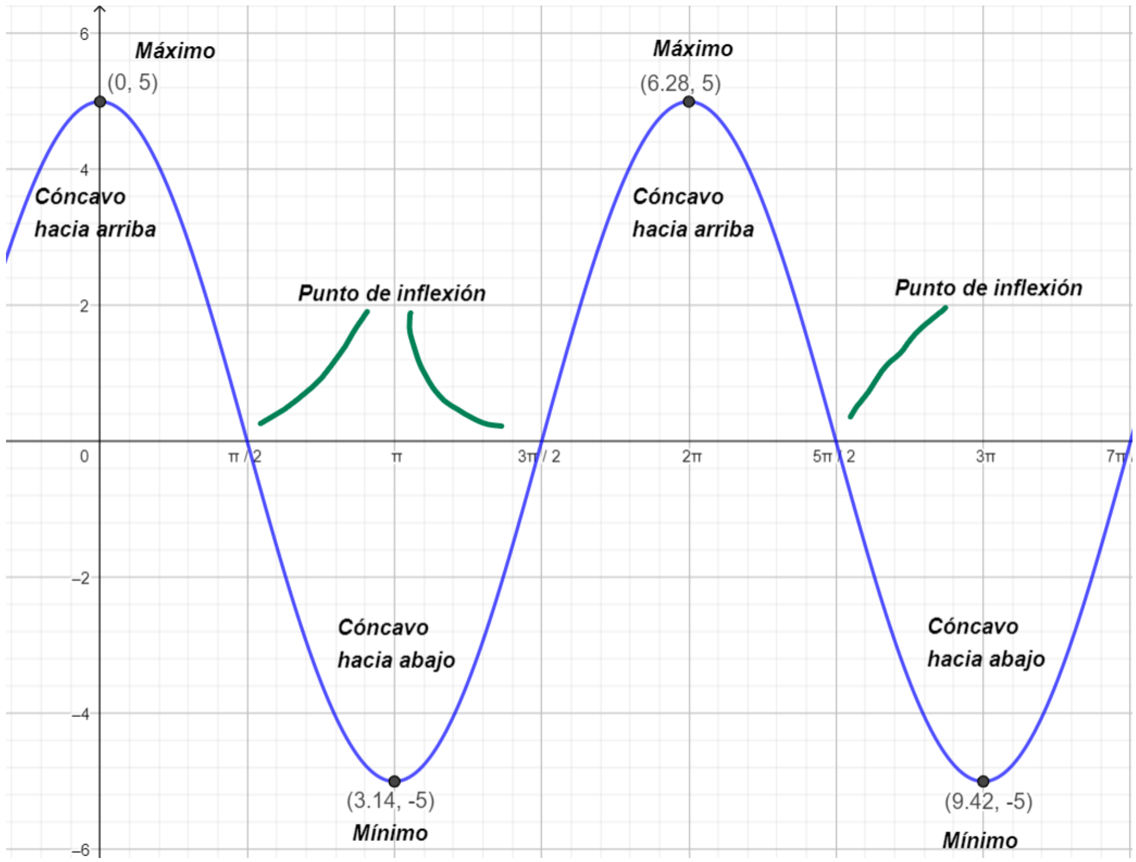
Para $x = 3\pi$

$f''(3\pi) = 5\ Cos\ (3\pi)$
$f''(3\pi) = 5\ (-1)$
$f''(3\pi) = 5$

Mínimo $(3\pi, 5)$

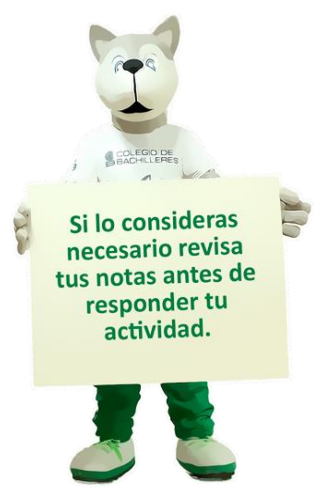
Los puntos de inflexión se presentan en el cambio de sentido de la curva, siendo en este caso los puntos: $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

Finalmente se realiza la comprobación al graficar la función



Actividad de aprendizaje 3

Determina los puntos de inflexión, máximos y mínimos de la siguiente función trigonométrica $f(x) = 3\ Sen\ x$, en los intervalos $[-\pi, 2\pi]$



En este apartado podrás valorar tu desempeño aptitudinal y actitudinal a lo largo del desarrollo del corte 3.

Aspecto para considerar	**Si**	**No**	**Cómo puedo realizarlo mejor**
• Organicé el tiempo de estudio para la realización de esta guía.			
• Realicé una lectura activa de los ejemplos de la guía.			
• Procuré eliminar las distracciones para realizar las actividades.			
• Realicé anotaciones a lo largo del desarrollo de la guía.			
• Consulté las fuentes sugeridas para los temas que representaron mayor dificultad.			
• Desarrollé detalladamente las actividades de aprendizaje sugeridas.			
• En caso necesario, busqué y realicé más ejercicios para reforzar mi aprendizaje.			

FUENTES CONSULTADAS

1. Fuenlabrada de la Vega, S. (2001) Cálculo Diferencial. 2ª edición. México Mc Graw Hill Interamericana.
2. Larson, R., Edwards, R. (2005) Cálculo Diferencial e Integral. 7ª edición. México, Mc Graw Hill Interamericana.
3. Jiménez, R. (2008) Cálculo Diferencial. 1ª edición. México, Pearson educación.
4. Guía para el examen de Matemáticas IV. 2019. Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa. https://drive.google.com/file/d/10Usemj2hFtX0eB35BZNHTXi6nnUz3LhX/vie
5. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Cálculo Diferencial e Integral I. 2002. Colegio de Bachilleres https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_I.pdf
6. Guía para el examen de Matemáticas IV. Programa de Estudio 2018. Colegio de Bachilleres, Plantel 3 Iztacalco. https://sites.google.com/view/modalidades-03-iztacalco/inicio/matem%C3%A1ticas
7. Granville, William Anthony. (2017) Cálculo Diferencial e Integral. México, Limusa.
8. Flores Meyer M. A. (2001). Cálculo Básico. 5ª. Reimpresión. México, Progreso.
9. Aguilar Márquez A. (2009). Matemáticas Simplificadas. 2ª. edición. México. Prentice Hall. Colegio Nacional de Matemáticas (Capítulo 5 aplicaciones de la derivada).

EVALUACIÓN FINAL

t

En este apartado llevarás a cabo su evaluación final, la cual te permite realizar una valoración de los conocimientos adquiridos a lo largo de los tres cortes de aprendizaje.

Instrucciones. Responde las siguientes actividades, en los casos que requieran procedimiento escríbelo detalladamente y argumenta tus respuestas.

1. Completa la siguiente tabla, con los datos que se te solicitan en cada caso.

Tipo de función	**Expresión**	**Dominio**	**Rango**	**Gráfica**	**Características y aplicaciones**
Lineal					
Cuadrática					
Cúbica					

Tipo de función	Expresión	Dominio	Rango	Gráfica	Características y aplicaciones
Seno					
Coseno					
Tangente					
Exponencial					
Logarítmica					

2. Grafica las siguientes funciones polinomiales, a partir de su gráfica determina sus intervalos crecientes y decrecientes.
   a) $f(x) = \frac{4}{5}x - 2$

   b) $g(x) = -3x^2 + 5x + 2$

   c) $h(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x$

3. Realiza las operaciones que se te solicitan en cada caso.

Sean $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 + 8$

a) $f(x) + g(x)$

b) $f(x) - g(x)$

c) $f(x) \cdot g(x)$

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

4. Determina la derivada para las siguientes funciones mediante la regla de derivación

a) $f(x) = -12x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 15x - 20$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

d) $f(x) = (7 - 3x^3)^2$

e) $f(x) = sen(x^2 + 5x)$

5. Determina la segunda derivada para las siguientes funciones

a) $f(x) = \cos(5x + 1)$

b) $g(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{7}{3}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}$

d) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)$

e) $f(x) = e^{2x^2}$

6.- Determina mediante el criterio de la primera derivada, los puntos máximos o mínimos, realiza la comprobación en la gráfica correspondiente de las siguientes funciones.

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

7.- Aplica el criterio de la segunda derivada, para determinar de las siguientes funciones, los puntos de inflexión, las coordenadas de los puntos máximos y/o mínimos, e indique en la gráfica estos puntos.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$

8.- Determina los puntos de inflexión, máximos y mínimos de la siguiente función trigonométrica $f(x) = 2\ Cos\ x$, en los intervalos $[0, 3\pi]$

PLAN 2014

ACTUALIZADO

Somos Lobos Grises,
somos Bachilleres